

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathbf{F} = -f(r) \mathbf{e}_r$$

$$L = m \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} \Rightarrow$$

$$\dot{L} = m (\underbrace{\dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}}}_{=0} + \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}})$$

$$= m \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

$$= -f(r) \underbrace{\mathbf{r} \times \mathbf{e}_r}_{=0} = 0$$

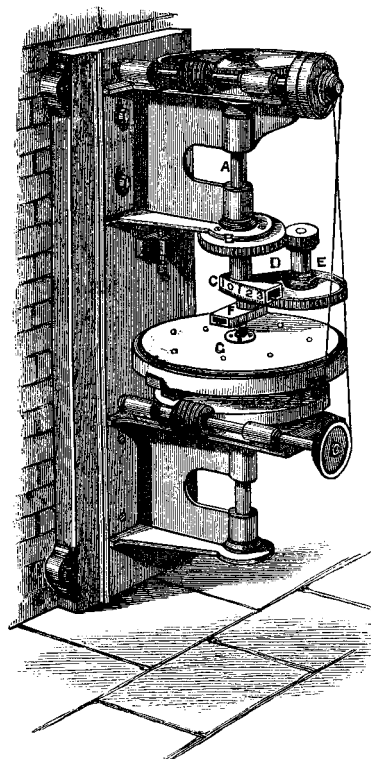
$$\Rightarrow L = \text{vakio}$$

tähtitieteen

harjoitustehtäviä

HANNU KARTTUNEN • PEKKA KRÖGER • MARKKU POUTANEN

Tähtitieteen harjoitustehtäviä

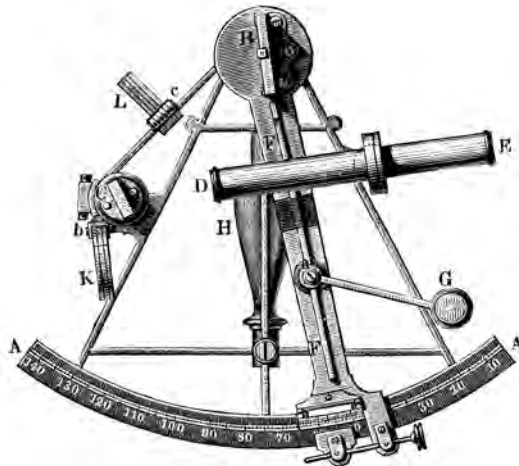


Tähtitieteen harjoitustehtäviä

Toinen korjattu laitos

koonneet, varastaneet ja keksineet ihan itse

Hannu Karttunen
Pekka Kröger
Markku Poutanen



Ursan julkaisuja 77

Tähtitieteellinen yhdistys Ursa r.y.
Helsinki 2001



Ursan julkaisuja 77
Copyright tekijät ja Ursa
Ensimmäinen laitos 1987
KL 52
ISBN 952-5329-11-9
ISSN 0357-7937



Ensimmäisen laitoksen esipuhe

Onnittelumme! Olet ryhtynyt lukemaan maailman parasta suomenkielistä tähtitieteen tehtäväkokoelmaa.

Tämä moniste sisältää pääasiassa Helsingin yliopiston tähtitieteen approbatur-kurssin laskuharjoituksia ja koetehtäviä ratkaisuineen vuosilta 1977–1986. Mukaan on otettu myös muutamia aikojen kuluessa keksimiämme tehtäviä, joita emme ole koskaan uskaltaneet käyttää laskuharjoitustehtävinä niiden vaikeuden vuoksi. Koska uskomme monien tehtävien kiinnostavan myös harrastajia, olemme nyt päättäneet ilahduttaa niillä muitakin kuin jatkuvasti pienenevää tähtitieteen opiskelijoiden joukkoa. Uskomme monisteen myös edistävän tulevien laskuharjoitusassistenttien pedagogisia kykyjä heidän nyt joutuessaan keksimään ihan uusia tehtäviä.

Moniste soveltuu paitsi tähtitieteen opiskelijoille myös niille alan harrastajille, jotka haluavat oppia tähtitiedettä enemmän kuin populaarijulkaisujen tasolla. Tehtävät perustuvat oppikirjaan *Karttunen, Kröger, Oja, Poutanen (toim.): Tähtitieteen perusteet, Ursa ja Valtion painatuskeskus, 1984*, jonka lukujen mukaan ne on myös ryhmitelty, tosin hieman mielivaltaisesti. Lisäksi tarvitaan vaihteleva määrä matematiikan taitoja. Osa tehtävistä on lähes triviaaleja, mutta jotkut voivat olla melkoisen vaikeita. Älä menetä toivoasi, vaikka kaikki eivät ensi yrittämällä selviäisikään.

Koska ratkaisut ovat pitkältä ajalta, voi varsinkin eräiden suureiden numeroarvoissa esiintyä pientä hajontaa, virallisesti hyväksytyillä luonnonvakioilla kun on tapana muuttua ajan mittaan. Pahoittelemme mahdollisia epäselvyyksiä.

Mikäli löydät teoksesta virheitä, ole hyvä ja ilmoita niistä meillekin. Olemme myös kiinnostuneita keksimistäsi esittämiämme yksinkertaisemmista ratkaisuista.

Tekstiin mitenkään liittymättömät visuaaliset välipalat ovat peräisin teoksesta *Nicolaus von Konkoly: Praktische Anleitung zur Anstellung Astronomischer Beobachtungen mit Besonderer Rücksicht auf die Astrophysik, Druck und Verlag von Friedrich Vieweg und Sohn, Braunschweig, 1883*.

Tämän teoksen valmistumisesta haluamme kiittää Zenith Z241 ja VAX 8600 -tietokoneita. Aivan erityisen kiitoksen ansaitsee T_EX-ladontaohjelma, jonka hämmästyttävät virheilmoitukset ovat viihdyttäneet meitä pitkinä mutta pimeinä talvi-iltoina. Symbolisen matematiikan ohjelma Macsyma on antanut moraalista tukea eräissä hankaliksi kokemissamme tehtävissä. Laskujen numeerisen puolen toteuttaminen on kuluttanut loppuun muutaman HP25, HP15C ja TI-59 -laskimen. Ilman niiden uhrautuvaa työpanosta tämä moniste ei olisi koskaan toteutunut. Kuka missäkin, juliaanisen päivän 244 6887 paikkeilla

Hannu Karttunen Pekka Kröger Markku Poutanen



Toisen laitoksen esipuhe

Alkuperäistä monistetta ei ole ollut saatavilla enää vuosiin. Osa sen tehtävistä on otettu *Tähtitieteen perusteiden* uusiin laitoksiin esimerkkeiksi tai harjoitustehtäviksi. Tästä *Tähtitieteen harjoitustehtävien* toisesta laitoksesta on jätetty pois ne tehtävät, jotka ovat oppikirjassa esimerkeinä ja joista siis on esitetty perusteelliset ratkaisut. Tehtävät on ryhmitelty oppikirjan kolmannen laitoksen mukaisesti. Tietoomme tulleet virheet on korjattu ja jokunen uusikin tehtävä on otettu mukaan, mutta luontainen laiskuutemme on tehokkaasti ehkäissyt kaikkinaiset laajamittaiset päivitykset. Esimerkiksi monien kohteiden koordinaateille on käytetty edelleenkin epookin 1950.0 mukaisia arvoja.

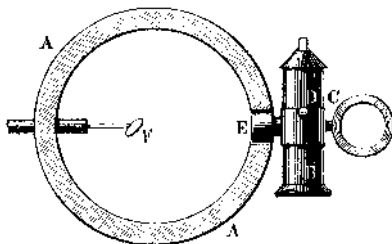
Pieniä korjailujamme tehdessämme löysimme ainakin yhden tehtävän ilman ratkaisua ja joukon sekalaisia virheitä, joista kukaan ei ollut meille valittanut. Semmoinen panee miettimään, huvitteleeko meidän lisäksemme kukaan muu laskeskelemalla aikansa kuluksi tällaisia tehtäviä. Joka tapauksessa otamme edelleenkin mieluusti vastaan kommentteja ja huomautuksia havaituista virheistä. Tämä laitos on toteutettu print-on-demand -tekniikalla, jolloin kerralla painettavat määrät ovat pienehköjä ja päivitykset saadaan mukaan aikaisempaa nopeammin.

Olemme yleensä yrittäneet käyttää jotenkin järkeviä lukuarvoja ja välitulosten tarkkuutta. Joissakin tehtävissä lopputulos voi kuitenkin muuttua melko paljon, jos alkuarvoja tai laskentatarkkuutta muutetaan. Siksi ei kannata hermostua, vaikka et saisikaan täsmälleen samoja lopputuloksia.

Tämän laitoksen toimitustyöllä on räkäkätty kannettavaa Fujitsu Lifebookia, mutta sekä kone että sen Linux-käyttöjärjestelmä voivat olosuhteisiin nähden hyvin.

Edelleenkin ties missä, noin 5030 päivää myöhemmin.

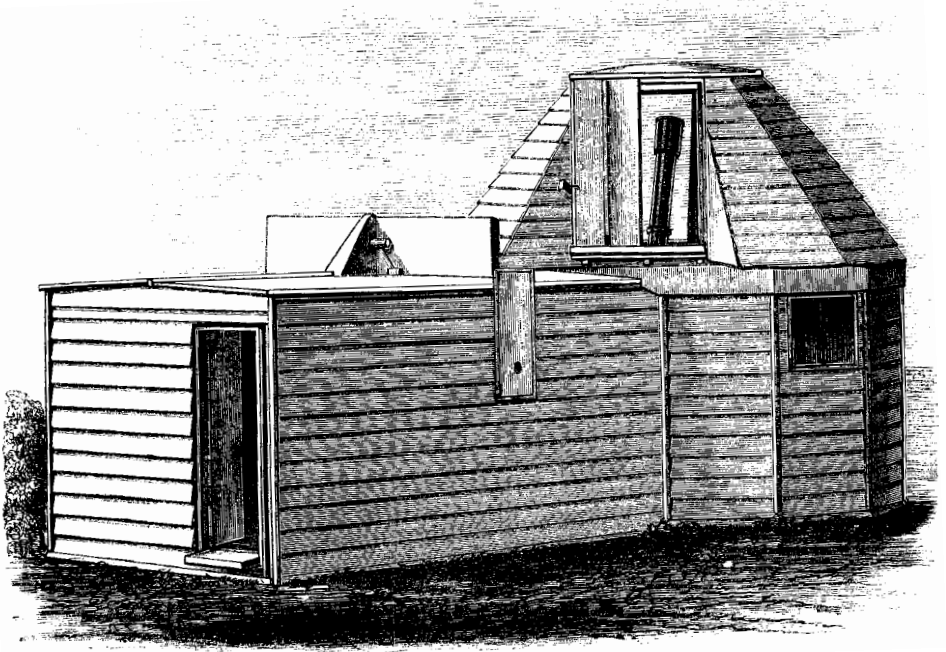
Ne ihan samat tekijät (ei meistä niin vain eroon pääse)



Sisällysluettelo

	Symbolien tavallisimmat merkitykset	9
	Tehtävät	11
1	Sekalaisia yleissivistäviä tehtäviä	13
2	Pallotähtitiedettä	15
3	Havaintolaitteet	19
4	Fotometriset käsitteet ja magnitudit	20
5	Säteilymekanismit	22
6	Taivaanmekaniikka	24
7	Aurinkokunta	27
8	Tähtien spektrit	30
9	Kaksoistähdet ja tähtien massat	31
10	Tähtien rakenne	32
11	Tähtien kehitys	33
12	Aurinko	34
13	Muuttuvat tähdet	35
14	Kompaktit tähdet	37
15	Tähtienvälinen aine	38
16	Tähtijoukot ja assosiaatiot	40
17	Linnunrata	42
18	Galaksit	44
19	Kosmologia	46
20	Sekalaisia tehtäviä	47
	Ratkaisut	53
1	Sekalaisia yleissivistäviä tehtäviä	55
2	Pallotähtitiedettä	60
3	Havaintolaitteet	77
4	Fotometriset käsitteet ja magnitudit	80
5	Säteilymekanismit	86
6	Taivaanmekaniikka	95
7	Aurinkokunta	106
8	Tähtien spektrit	121
9	Kaksoistähdet ja tähtien massat	123
10	Tähtien rakenne	125
11	Tähtien kehitys	128
12	Aurinko	129
13	Muuttuvat tähdet	131

14	Kompaktit tähdet	135
15	Tähtienvälinen aine	139
16	Tähtijoukot ja assosiaatiot	143
17	Linnunrata	145
18	Galaksit	149
19	Kosmologia	152
20	Sekalaisia tehtäviä	154



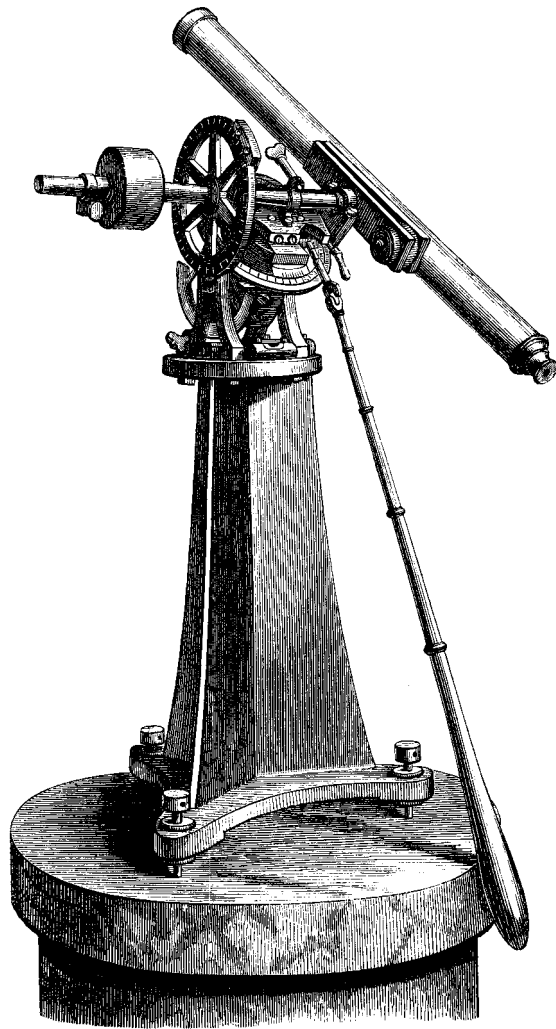
Symbolien tavallisimmat merkitykset

- A* atsimuutti; Bondin albedo; ekstinktio
- B* näennäinen sininen magnitudi; pintakirkkaus
- B_ν, B_λ Planckin funktio
- C** kompleksiluvut
- D* objektiivin yms. läpimitta; spektrin dispersio
- E* palloeksessi; eksentrisen anomalia; kokonaisenergia
- E_{B-V} värieksessi
- F* vuontiheys; voima
- F** voima
- G* gravitaatiovakio $\approx 6.67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$
- H* skaalakorkeus; Hubblen vakio $\approx 75 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$
- I* intensiteetti
- L* luminositeetti; impulssimomentti
- L** impulssimomentti (liikemäärämomentti)
- L_\odot Auringon luminositeetti $\approx 3.9 \times 10^{26} \text{ W}$
- M* keskianomalia; absoluuttinen magnitudi; massa
- M_\odot Auringon massa $\approx 1.989 \times 10^{30} \text{ kg}$
- M_\odot Auringon absoluuttinen magnitudi
- M_\oplus Maan massa = $M_\odot/332\,946 \approx 5.974 \times 10^{24} \text{ kg}$
- N** luonnolliset luvut (0,1,2,...)
- P* periodi
- P_{syn} synodinen periodi
- P_{sid} sideerinen periodi
- R* säde; Rydbergin vakio
- R** reaalityluvut
- R_\odot Auringon säde $\approx 6.960 \times 10^8 \text{ m}$
- R_\oplus Maan säde 6357 km – 6378 km
- T* lämpötila; kineettinen energia
- T_e efektiivinen lämpötila
- T_b kirkkauslämpötila
- T_c väriämpötila
- T_a antennilämpötila
- U* näennäinen ultraviolettimagnitudi; potentiaalienergia
- V* näennäinen visuaalimagnitudi
- X* ilmamassa
- Z** kokonaisluvut (0,±1, ±2, ...)
- a* korkeus horisontista; säteilytiheysvakio $\approx 7.5643 \times 10^{-16} \text{ J m}^{-3} \text{ K}^{-4}$; ekstinktio pitoisuusyksikköä kohti
- b* galaktinen leveys
- c* valon nopeus = $299\,792\,458 \text{ m s}^{-1}$ (nykyinen määritelmä)
- e* ≈ 2.71828 ; eksentrisyys; elektronin varaus
- f* polttoväli; luonnollinen anomalia
- g* vetovoiman kiihtyvyys maanpinnalla



- h Planckin vakio $\approx 6.6256 \times 10^{-34}$ J s; tuntikulma
 i kaksoistähden ratatason inkliinaatio; $\sqrt{-1}$
 $\hat{\mathbf{i}}$ radan isoakselin suuntainen yksikkövektori
 $\hat{\mathbf{j}}$ radan pikkuakselin suuntainen yksikkövektori
 k Boltzmannin vakio $\approx 1.3805 \times 10^{-23}$ J K $^{-1}$
 \mathbf{k} impulssimomentti massayksikköä kohti
 ℓ galaktinen longitudi
 m massa; näennäinen magnitudi; ensimmäinen prekessiovakio
 n taitekerroin; toinen prekessiovakio
 p geometrinen albedo
 q vaiheintegraali
 r etäisyys
 t aika
 v nopeus
 z punasiirtymä
 Γ gammafunktio
 Δ Maan etäisyys kohteesta
 Θ tähtiaika
 Υ kevättasauspiste
 Φ vaihefunktio
 Ω nousevan solmun pituus
 α rektaskensio; vaihekulma; kulmaläpimitta
 β ekliptikaalinen leveys
 γ Gaussin gravitaatiovakio = 0.000 295 912 208 266 AU 3 M $_{\odot}^{-1}$ d $^{-2}$
 δ deklinaatio
 ε ekvaattorin kaltevuus ekliptikan suhteen
 ζ Riemannin ζ -funktio
 θ kaukoputken erotuskyky
 ι inkliinaatio
 κ massa-absorptiokerroin
 λ aallonpituus; longitudi; keskimääräinen vapaa matka
 μ ominaisliike; $G(m_1 + m_2)$
 ν taajuus
 π 3.1415926536; parallaksi
 ϖ perihelin pituus
 ρ tiheys
 σ Stefanin-Boltzmannin vakio = $ac/4 \approx 5.6693 \times 10^{-8}$ W m $^{-2}$ K $^{-4}$
 τ optinen paksuus
 ϕ paikkakunnan leveysaste
 ω avaruuskulma; kulmanopeus; perihelin argumentti
 \odot Aurinko
 \oplus Maa
 \star tähti
 \otimes lamppu
 $[a,b]$ suljettu väli, $x \in [a,b] \iff a \leq x \leq b$
 $[a,b)$ puoliaavoin väli, $x \in [a,b) \iff a \leq x < b$
 $(a,b]$ puoliaavoin väli, $x \in (a,b] \iff a < x \leq b$
 (a,b) avoin väli, $x \in (a,b) \iff a < x < b$

Tehtävät





1 Johdanto

Tähän on koottu sekava valikoima mihinkään lukuun kuulumattomia tehtäviä, jotka liittyvät matematiikkaan yleensä ja geometriaan erityisesti, fysikaalisten olioiden laatumuunnoksiin yms. Jotkut tähtitieteen tyystin kuulumattomilta tuntuvat tehtävät ovat mukana sen tähden, että niistä saatavia tuloksia tarvitaan johonkin joskus myöhemmin.

1.1 Ratkaise numeerisesti yhtälöt

a) $\cos x = x$, $x \in [0, 2\pi]$,

b) $x - \ln(1/x) = 0$,

c) $x^5 - x^3 + 0.1 = 0$.

Kolmen desimaalin tarkkuus riittää.

1.2 Gammafunktio $\Gamma : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ määritellään kaavalla

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt, \quad \operatorname{Re} z > 0.$$

Osoita, että

a) $\Gamma(n+1) = n!$, kun $n \in \mathbf{N}$,

b) $\int_0^\infty t^{z-1} e^{-kt} dt = \Gamma(z)/k^z$.

1.3 Dopplerin ilmiön suhteellisuusteorian mukainen kaava näkösäteen suuntaan liikkuvalla säteilylähteelle on

$$\frac{\nu}{\nu_0} = \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}},$$

missä ν_0 on säteilyn lähtötaajuus, ν havaittu taajuus, v lähteen etäännyttäminenopeus ja c valon nopeus. Määrää kaavan likimääräinen muoto, kun $v \ll c$.

1.4 Kuinka korkealla keskimääräisestä merenpinnasta on Hangon (Hangö) horisonttitaso Hiittisissä (Hitis), ts. paljonko maapallo kaareutuu tällä matkalla? Välimatka on 25 km.

1.5 Mihin suuntaan Helsingistä lähtee Helsingin ja pohjoisnavan välinen yhdysjana? Entä Helsingin ja etelänavan?

1.6 Kumpi näkyy läpimitaltaan suurempana, 4 valovuoden päässä oleva Auringon kokoinen tähti (säde noin 700 000 km) vai Tallinnassa oleva hehkulamppu (halkaisija 5 cm) Helsingistä katsottuna? Tallinnan ja Helsingin välimatka on noin 85 km.

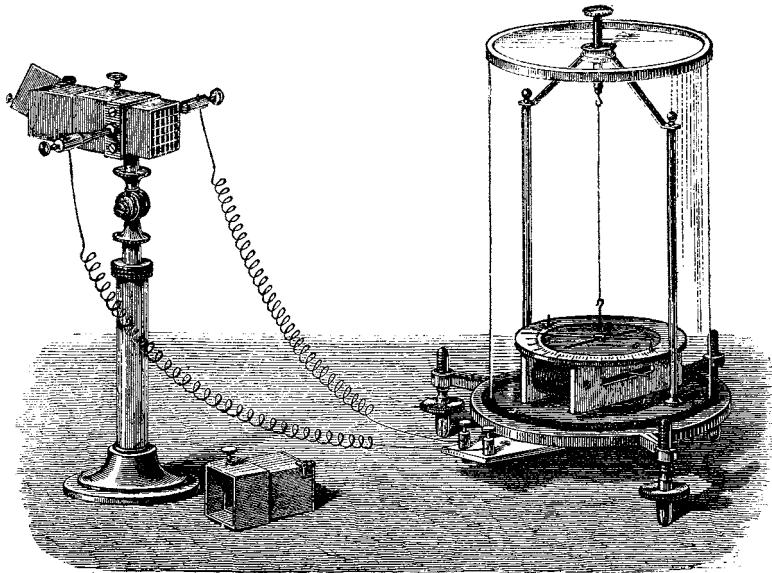
1.7 Kulmaetäisyyksien arviointiin sopivia apuvälineitä on jokaisella aina käsissä. Määrää, kuinka suuressa kulmassa a) vaaksa, b) etusormen leveys näkyy, kun käsivarsi on ojennettu suoraksi.

1.8 Eräessä romaanissa (Fred Hoyle: *Musta pilvi*) tähtitieteilijät havaitsivat mustan pilven, joka liikkui suoraan kohti Aurinkoa. Havaintohetkellä pilvi oli vielä melko kaukana. Kuinka pitkä aika oli



jäljellä pilven saapumiseen, kun sen kulmaläpimitta oli kasvanut kuukaudessa 5 %?

- 1.9 a) Montako steradiaania on täysi avaruuskulma?
b) Kuinka suuressa avaruuskulmassa täysikuu näkyy Maasta?
- 1.10 Jos matkan yksikkönä käytetään AU:ta (likimain Maan etäisyys Auringosta), massan yksikkönä Auringon massaa ja ajan yksikkönä vuorokautta, gravitaatiovakio (ns. Gaussin gravitaatiovakio) on $0.00029\,59122\,08266$. Laske gravitaatiovakion arvo, kun a) käytetään SI-yksiköitä, b) $[m]$ = maapallon massa, $[l]$ = km, $[t]$ = min. Jälkimmäinen muoto on hyödyllinen laskettaessa esim. Maata kiertävien satelliittien ratoja.
- 1.11 Laske Auringon massa metreinä sellaisessa yksikköjärjestelmässä, jossa valon nopeus on $c = 1$ ja gravitaatiovakio on $G = 1$. Paljonko Auringon massa olisi sekunteina?



2 Pallotähtitiedettä

Pallotrigonometriaa

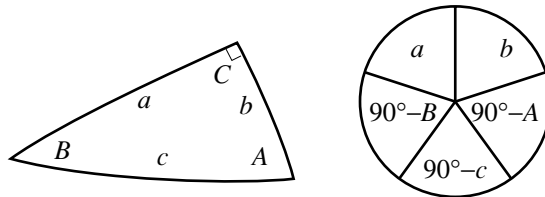
- 2.1 Laske lentomatka Helsingistä Seattleen lyhintä reittiä pitkin. Missä on reitin pohjoisin piste ja kuinka lähellä pohjoisnapaa se on? Helsingin pituus on 25°E ja leveys 60° ; Seattlen pituus on 122°W ja leveys 48° . Maapallon säteelle voit käyttää arvoa 6370 km.
- 2.2 Pallokolmion ratkaisukaavoissa voit vaihtaa sivut ja kulmat keskenään seuraavilla sijoituksilla:

$$\begin{aligned} A &= 180^\circ - a, & B &= 180^\circ - b, & C &= 180^\circ - c, \\ a &= 180^\circ - A, & b &= 180^\circ - B, & c &= 180^\circ - C. \end{aligned}$$

Perustele tämä ja johda kosinikaavan analoginen muoto:

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a.$$

- 2.3 Suorakulmaiselle pallokolmiolle pätee Neperin sääntö: oikeanpuoleisessa kaaviossa kunkin osan sini = viereisten osien tangenttien tulo = kahden muun osan kosinien tulo.



Todista Neperin sääntö seuraavissa tapauksissa:

- a) $\sin(90^\circ - c) = \cos c = \cos a \cos b$,
 b) $\sin a = \tan b \tan(90^\circ - B) = \cos(90^\circ - A) \cos(90^\circ - c) = \sin A \sin c$.
- 2.4 Osoita, että pallon pinnalle piirretyn neliön ala steradiaaneina on $4 \arcsin(\tan^2 \frac{1}{2}a)$, missä a on neliön sivu. Sivut ovat isoympyrän kaaria. (Vihje: jaa neliö lävistäjillä neljään suorakulmaiseen pallokolmioon ja käytä hyväksi pallokolmion pinta-alan ja palloeksessin välistä yhteyttä.)

Koordinaatistot

2.5 Otavan tähtien koordinaatit ovat (epookki 1950.0):

	α	δ
α UMa	11 h 00.7 min	62°01'
β UMa	10 h 58.8 min	56°39'
γ UMa	11 h 51.2 min	53°58'
δ UMa	12 h 13.0 min	57°19'
ϵ UMa	12 h 51.8 min	56°14'
ζ UMa	13 h 21.9 min	55°11'
η UMa	13 h 45.6 min	49°34'

- a) Piirrä tähdistöä kuva, jossa 1 tunti rektaskensioakselilla vastaa 15° deklinaatioakselilla. Onko tulos oikean Otavan näköinen?
- b) Piirrä toinen kuva, jossa 1 h:n pituus on puolet 15° :n pituudesta. Paraniko tulos? Miksi?
- c) Mittaa kuvasta α - ja γ -tähtien välinen kulmaetäisyys. Vertaa tulosta pallotrigonometrian antamaan tarkkaan arvoon.
- 2.6 Tähtien korkeus sen ohittaessa etelämeridiaanin on 85° ja pohjoismeridiaanin 45°. Mikä on tähden deklinaatio ja havaintopaikan leveys?
- 2.7 Helsingin leveys on 60°10'.
- a) Näkyykö Antares (α Scorpii) Helsingissä? Antareksen deklinaatio on -26°19'.
- b) Mitkä tähdet ovat Helsingissä sirkumpolaarisia? Onko Vega (α Lyrae, $\delta = 38^\circ 44'$) sirkumpolaarinen? Mikä on sen korkeus pohjoismeridiaanissa?
- 2.8 Missä päin maapalloa seuraavat ilmiöt ovat mahdollisia?
- a) Castor (α Geminorum, $\delta = 31^\circ 56'$) on sirkumpolaarinen.
- b) Betelgeuze (α Orionis, $\delta = 7^\circ 24'$) kulminoit zeniitissä.
- c) α Centaurin ($\delta = -60^\circ 46'$) voi nähdä 30° korkeudella.
- 2.9 Missä kulmassa deklinaatioympyrä δ leikkaa horisontin leveysasteella ϕ ? Missä kulmassa Aurinko laskee Helsingissä kesäpäivänseisauksen aikaan, jos refraktiota ei oteta huomioon? Miten refraktio vaikuttaa tulokseen?
- 2.10 Paljonko on tähtiaika, kun Sirius on etelässä? Entä Otavan ollessa pohjoisessa?
- 2.11 Mistä ilmansuunnasta Orionin tähdistön keskikohta nousee? Paljonko tähtiaika on silloin? Missä Otava näkyy samalla hetkellä?
- 2.12 Vuonna 1980 Helsingin yliopiston vanhaa ruosteista kaksoisrefraktoria käyttänyt observaattori havaitsi illalla kello 22:20 Suomen virallista aikaa Arcturuksen ($\alpha = 14$ h 13 min, $\delta = 19.5^\circ$) tuntikulmaksi 9 h 9 min. Observatorion leveysaste on 60°10' ja pituus 24°57'.
- a) Paljonko oli tähtiaika?
- b) Laske Arcturuksen korkeus ja atsimuutti em. hetkellä.
- c) Oliko Altair ($\alpha = 20$ h 10 min, $\delta = 9^\circ$) näkyvässä samaan aikaan?



- c) Minä päivänä havainto tehtiin? (Vuonna 1980 kevätpäiväntasa-
saus oli 20.3 kello 13.)
- 2.13 Paljonko on tähtiaika kello 12 Greenwichissä a) kevättasauspäi-
vänä, b) syystasauspäivänä, c) kesäpäivänseisauksen aikaan, d)
marraskuun 1 päivänä? Paljonko on tähtiaika Helsingissä kello 12
em. päivinä? Vastaus kymmenen minuutin tarkkuudella ilman
ajantasausta.
- 2.14 Vuonna 1982 kevätpäiväntasa-
saus oli 21.3 kello 01 Suomen virallis-
ta aikaa. Laske tähtiaika Uukuniemellä 3.6 kello 01 (eli 02 kesäai-
kaa). Havaintopaikan pituus on 30° .
- 2.15 Laske Auringon rektaskensio ja deklinaatio, kun sen ekliptikaali-
nen pituus on 330° . Milloin (kuukausi, päivä) kyseinen tilanne
suunnilleen sattuu?
- 2.16 Auringon rektaskensio 1.6.1983 oli 4 h 35 min ja deklinaatio $22^\circ 00'$.
Laske Auringon geosentrinen ekliptikaalinen pituus ja leveys sekä
maapallon heliosentrinen ekliptikaalinen pituus ja leveys.
- 2.17 Millä tähtiajan hetkellä Aurinko nousi 1.6.1983 Oulussa (leveys
 65°) ja mikä oli sen tuntikulma silloin?
- 2.18 Osoita, että napapiirillä Aurinko
a) nousee 22.12.–22.6. joka päivä samalla tähtiajan hetkellä Θ_0 ,
b) laskee 22.6.–22.12. samoin tähtiajan hetkellä Θ_0 .
Paljonko on Θ_0 ?
- 2.19 Laske päivän pituus (auringonnoususta auringonlaskuun) juhan-
nuksena (jolloin Auringon deklinaatio on $23^\circ 26'$)
a) Korvatunturilla (leveys $68^\circ 3'$),
b) Hangossa (leveys $59^\circ 48'$),
c) Kravun kääntöpiirillä (leveys $23^\circ 26'$).
- 2.20 Laske kesän pisimmän päivän pituus Helsingissä (leveys $60^\circ 10'$)
a) Auringon keskipisteen mukaan laskettuna, kun refraktiota ei
oteta huomioon,
b) Auringon yläreunan mukaan, kun lisäksi otetaan huomioon ho-
risonttirefraktio $35'$. Mistä suunnasta Aurinko tällöin nousee?
- 2.21 Neito S. on syntynyt 6.12.1917.
a) Missä tähdistössä Aurinko oli silloin?
b) Mikä on hänen horoskooppimerkkinsä?
Voit olettaa Maan liikkuvan ympyräradalla vakionopeudella; tä-
mä ei vaikuta mitenkään lopputulokseen tässä tapauksessa.
- 2.22 Joulua pakoon lähtenyt keskimääräinen suomalainen turisti he-
rää kovaan päänsärkyyn jossakin aivan oudossa paikassa. Hän ei
jaksakaan lähteä ulos hotellihuoneesta, vaan alkaa muistella joskus op-
pimiaan tähtitieteen alkeita selvittääkseen sijaintinsa. Hän seu-
raa, miten Aurinko liikkuu hitaasti vastapäivään taivaalla ja pa-
nee merkille, että se on korkeimmillaan hänen vielä Suomen aikaa
käyvän kellonsa näyttäessä 2:32, jolloin hänen pöydällä pitämän-
sä kynän varjon pituus on kolmannes kynän pituudesta. Missä
turisti on?

- 2.23 Kahden tähden koordinaatit ovat (α, δ) ja $(\alpha + 12 \text{ h}, \delta')$. Ne havaitaan korkeuksilla a ja a' . Osoita, että havaintopaikan leveys saadaan tällöin kaavasta

$$\sin \phi = \frac{\sin a \cos \delta' + \sin a' \cos \delta}{\sin(\delta + \delta')}.$$

- 2.24 Johda muunnoskaavat, joilla ekvatoriaalisista koordinaateista saadaan galaktiset. Linnunradan keskustan suunta on $\alpha_0 = 17 \text{ h } 42.4 \text{ min}$, $\delta_0 = -28^\circ 55'$ ja pohjoisnavan suunta $\alpha_P = 12 \text{ h } 49.0 \text{ min}$, $\delta_P = 27^\circ 24'$.

Koordinaatteja muuttavat tekijät

- 2.25 Tähdien deklinaatio on 60° . Sen rektaskensio on sadassa vuodessa muuttunut 0.5 s ja deklinaatio $1.2''$. Laske tähden ominaisliike.
- 2.26 Kun Maa liikkuu ekliptikan tasossa olevaa tähteä kohti, tähden spektrin kalsiumin viiva $\lambda = 422.7 \text{ nm}$ siirtyy punaiseen päin 0.028 nm . Puoli vuotta myöhemmin punasiirtymä on 0.113 nm . Laske tähden radiaalinopeus ja maapallon ratanopeus.
- 2.27 Sirkuksen koordinaatit epookille 1900.0 olivat $\alpha = 6 \text{ h } 40 \text{ min } 45 \text{ s}$, $\delta = -16^\circ 35'$ ja ominaisliikkeen komponentit $\mu_\alpha = -0.037 \text{ s a}^{-1}$, $\mu_\delta = -1.12'' \text{ a}^{-1}$. Laske koordinaatit epookille 2000.0. Ota huomioon myös prekessio.
- 2.28 Sirkuksen parallaksi on $0.375''$ ja radiaalinopeus -8 km s^{-1} . Laske sen tangentiaalinopeus ja avaruusnopeus. (Ks. myös edellinen tehtävä.) Kuinka pitkän ajan kuluttua Sirius on lähinnä Aurinkoa? Mitkä ovat sen ominaisliike ja parallaksi silloin?
- 2.29 Alla on osa refraktiotauluista.

havaittu korkeus	todellinen korkeus
0°	$-0^\circ 35' 21''$
1°	$+0^\circ 35' 15''$
2°	$+1^\circ 41' 36''$
3°	$+2^\circ 45' 36''$
4°	$+3^\circ 48' 17''$
5°	$+4^\circ 50' 09''$

3 Havaintolaitteet

- 3.1 Mitä suurennusta käyttäen Jupiter suurimmillaan näyttää yhtä suurelta kuin Kuu paljain silmin?
- 3.2 Kuusta otettiin valokuva teleskoopilla, jonka objektiivin halkaisija oli 20 cm ja polttoväli 150 cm. Valotusaika oli tällöin 0.1 s.
 - a) Mikä valotusaika tarvitaan teleskoopilla, jonka objektiivin halkaisija on 15 cm ja polttoväli 200 cm?
 - b) Kuinka suuri on Kuun kuva valokuvauslevyllä kummassakin tapauksessa?
 - c) Kummankin kaukoputken avulla katsottiin Kuuta okulaarilla, jonka polttoväli oli 25 mm. Mitkä olivat suurennukset?
- 3.3 Schmidt-teleskoopin objektiivin polttoväli on 100 cm. Kuinka laaja taivaan alue teleskoopilla voidaan kuvata 9 cm × 9 cm kokoiselle valokuvauslevylle? Mikä on Kuun läpimitta levyllä?
- 3.4 Kaksoistähden ζ Lyrae komponenttien välimatka on 44''; ϵ^2 Lyraen komponenttien välimatka on 2.3''. Kuinka suuri kaukoputki tarvitaan, jotta tähdet nähtäisiin erillisinä?
- 3.5 Kuinka kaukaa pystytään 30 cm teleskoopilla erottamaan toisistaan kaksoistähden komponentit, joiden välimatka on 10 AU?
- 3.6 α Centaurin etäisyys on 1.32 pc ja säde 1.2 Auringon sädettä. Mikä pitäisi teleskoopin objektiivin halkaisijan olla, jotta sen erotuskyky olisi sama kuin α Centaurin läpimitta? Kuinka suuri olisi sellainen 72 GHz:n taajuudella toimiva radioteleskooppi, jolla on sama erotuskyky?
- 3.7 Laske sellaisen kaukoputken erotuskyky, jonka objektiivin halkaisija on sama kuin silmän (noin 6 mm). Vertaa tulosta silmän erotuskykyyn, joka on noin 2'. Mistä ero johtunee? Mikä tulisi radioteleskoopin halkaisijan olla, jotta sillä olisi sama erotuskyky kuin silmällä? Käytä radioteleskoopille taajuuksia 10 MHz ja 10 GHz.
- 3.8 Metsähovin radioteleskoopin antennin halkaisija on 13.7 m. Laske teleskoopin erotuskyky, kun havaitaan spektriviivaa taajuudella 22 GHz.
- 3.9 Käytettäessä Amherstin ja Rään radioteleskooppeja interferometrina on kantaviivan pituus noin 2900 km.
 - a) Laske systeemin erotuskyky 22 GHz:n taajuudella.
 - b) Mikä pitäisi optisen teleskoopin objektiivin halkaisijan olla, jotta sillä olisi sama erotuskyky?

4 Fotometriset käsitteet ja magnitudit

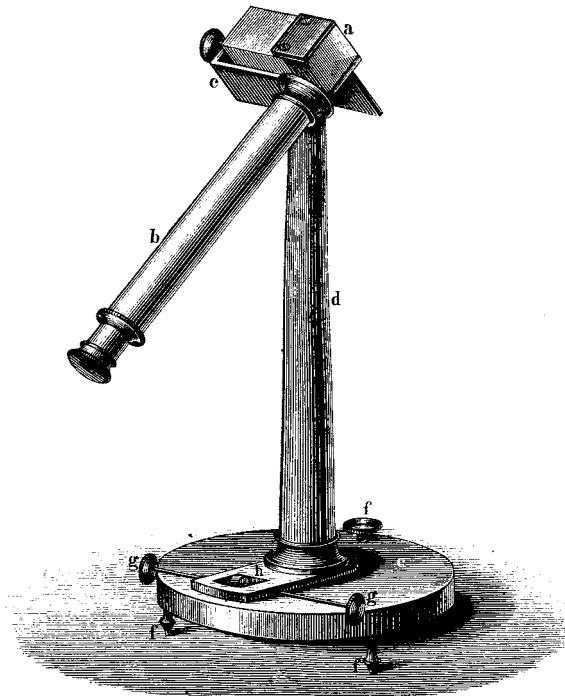
- 4.1 a) α Centaurin komponenttien näennäiset magnitudit ovat 0.0 ja 1.4. Mikä on komponenttien kokonaismagnitudi?
 b) Kolminkertaisen tähden μ Bootis komponenttien magnitudit ovat 4.5, 7.1 ja 7.8. Laske tähden kokonaismagnitudi.
- 4.2 Kolminkertaisen tähden kokonaismagnitudi on 0.0. Kahden komponentin magnitudit ovat 1.0 ja 2.0. Mikä on kolmannen komponentin magnitudi?
- 4.3 Tähtitieteilijä mittasi torstaina erään tähden magnitudiksi $m = 5.0$. Perjantaina hän havaitsi samaa tähteä, mutta käsitteli havaintonsa viikonlopun takia vasta maanantaina. Tällöin hän huomasi magnitudin olleen $m' = 3.5$. Saattoiko magnitudin muutos johtua siitä, että tähti oli tulossa suoraan kohti Maata?
- 4.4 a) Laske Auringon absoluuttinen magnitudi, kun näennäinen magnitudi on -26.7 .
 b) Jos galaksin absoluuttinen magnitudi on -20 , niin kuinka suuri on sen säteilemän energiavuon suhde Auringon säteilemään. Magnitudit ovat bolometrisiä.
- 4.5 Erään tähden absoluuttinen magnitudi on $M = 5$. Supernovaräjähdyksessä tähti tulee miljardi kertaa kirkkaammaksi. Mikä on kyseisen supernovan näennäinen magnitudi Andromedan galaksin etäisyydellä (690 kpc)?
- 4.6 Tähti, jonka absoluuttinen magnitudi on 0.0, räjähtää supernovana, jolloin sen kirkkaus kasvaa 20 magnitudia. Mikä on supernovan näennäinen magnitudi Maassa, kun tähden etäisyys on 3000 pc ja interstellaarinen ekstinktio on 1 mag kpc^{-1} ?
- 4.7 Oletetaan, että kaikkien tähtien absoluuttinen magnitudi on suunnilleen sama. Mikä on silloin näennäistä magnitudia $m + 1$ kirkkaampien tähtien lukumäärän suhde magnitudia m kirkkaampien tähtien lukumäärään, kun tähtitiheys oletetaan vakioksi?
- 4.8 Tähtitaivasta katsotaan kolminkertaisen ikkunan läpi. Jokainen lasin ja ilman rajapinta läpäisee 85 % siihen saapuvasta valosta (eli säteilyn vuontiheydestä).
 a) Mikä on Reguluksen ($m_V = 1.36$) magnitudi ikkunan läpi katsoessa?
 b) Mikä on ikkunan optinen paksuus?
- 4.9 Tähden absoluuttinen magnitudi on 2.5, näennäinen magnitudi 6.0 ja trigonometrinen parallaksi $0.02''$. Kuinka suuri on ekstinktio tähden suunnassa (magnitudina kiloparsekia kohti)? Mistä suuri poikkeama keskimääräisestä arvosta voisi johtua?

- 4.10 Tähdien HD333444 näennäinen visuaalinen magnitudi on 11.0, absoluuttinen visuaalinen magnitudi 0.1 ja värieksessä 0.37. Laske ekstinktio visuaalialueessa ja tähden etäisyys.
- 4.11 Erään tähden $V = 15.1$, $B - V = 1.6$ ja $M_V = 1.3$. Tähden suunnassa ekstinktio visuaalialueessa on $a_V = 1 \text{ mag kpc}^{-1}$. Laske tähden ominaisväri.
- 4.12 Kuinka monta magnitudia tähden valo heikkenee heijastuessaan tyynen metsälammen pinnasta? Piirrä muutos tähden korkeuden funktiona. Veden taitekerroin on $n = 1.33$. Jos tähden valo on polarisoitumatonta (kuten yleensä on), heijastuneen säteilyn intensiteetin suhde saapuvaan on $r = \frac{1}{2}(R_{\parallel}^2 + R_{\perp}^2)$, missä R_{\parallel} ja R_{\perp} ovat Fresnelin kertoimet:

$$R_{\parallel} = \frac{\cos i - n \cos t}{\cos i + n \cos t}, \quad R_{\perp} = \frac{\cos t - n \cos i}{\cos t + n \cos i}.$$

Näissä i on pinnan normaalin ja tulevan säteilyn välinen kulma ja t normaalin ja taittuneen säteilyn välinen kulma. Näiden kulmien välillä pätee Snellin kaava $\sin i = n \sin t$.

- 4.13 Auringonkaltaista tähteä HD209458 kiertää planeetta, jonka ratatason näemme kutakuinkin sivulta. Aina kun planeetta kulkee tähdet pinnan editse, tähden valo himmenee 0.02 magnitudia. Laske planeetan halkaisija. Oletetaan, että tähti on Auringon kokoinen.



5 Säteilymekanismit

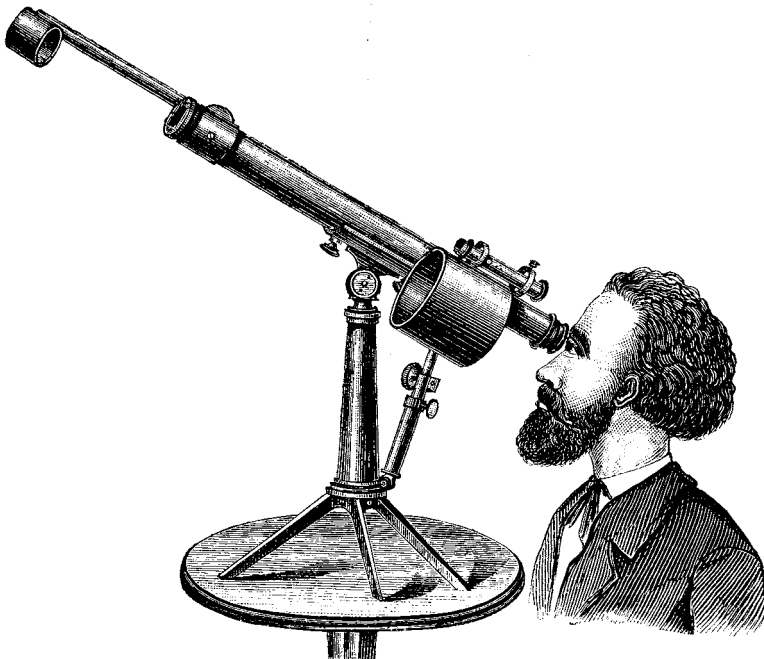
- 5.1 Mikä pitäisi kvanttiluvun n olla, jotta vetyatomin siirtymää $n + 1 \rightarrow n$ vastaava aallonpituus olisi 21.05 cm? Tähtienvälisen aineen havaitaan säteilevän tällä aallonpituudella varsin voimakkaasti. Voineeko säteily johtua em. siirtymästä?
- 5.2 Piirrä Planckin funktion $B_\lambda(T)$ kuvaaja aallonpituusvälillä [100 nm, 1500 nm], kun lämpötila on a) 5000 K, b) 6000 K.
- 5.3 Laske lämpötilassa T olevan mustan kappaleen säteilyn kokonaisintensiteetti.
- 5.4 Avaruuden täyttää maailmankaikkeuden alkua ajoilta jäljelle jäänyt taustasäteily, joka tällä hetkellä vastaa 2.7 K lämpötilassa olevan mustan kappaleen säteilyä. Millä aallonpituudella säteilyn intensiteetti on suurimmillaan? Mikä on taustasäteilyn kokonaisintensiteetti? Kuinka suuri on säteilyn intensiteetti näkyvän valon alueella verrattuna Auringon intensiteettiin?
- 5.5 Laske sulavan jään lämpösäteilyn kokonaisvuontiheys ja maksimi-intensiteetin aallonpituus.
- 5.6 a) Mustan kappaleen lämpötila on T . Kuinka suuri osa sen säteilyenergiasta tulee väliltä $[\lambda_1, \lambda_2]$, kun $\lambda_1, \lambda_2 \ll \lambda_{\max}$?
b) Hehkulampun wolframlangan $T = 2500$ K. Kuinka suuri osa energiasta on näkyvää valoa ($\lambda \in [400 \text{ nm}, 700 \text{ nm}]$)?
- 5.7 Punaisen jättiläisen $T = 2500$ K ja säde 100 Auringon sädettä.
a) Laske tähden kokonaisluminositeetti ja luminositeetti visuaalialueessa ($\lambda \in [400 \text{ nm}, 700 \text{ nm}]$).
b) Kuinka kauas olisi 100 watin lamppu vietävä, jotta se näyttäisi yhtä kirkkaalta kuin em. tähti 10 parsekin päästä?
- 5.8 Aurinkovakio eli Auringon säteilyvuon tiheys maapallon etäisyydellä on 1390 W m^{-2} . Auringon kulmaläpimitta on $32'$. Laske Auringon efektiivinen lämpötila.
- 5.9 a) ϵ Eridanin absoluuttinen bolometrinen magnitudi on $M_{\text{bol}} = 5.4$ ja efektiivinen lämpötila $T_e = 4600$ K. Laske tähden säde, kun Auringolle $M_{\text{bol}, \odot} = 4.7$ ja $T_{e, \odot} = 5800$ K.
b) Siriuksen $T_e = 10\,000$ K, näennäinen visuaalinen magnitudi $m_V = -1.5$, etäisyys $r = 2.67$ pc ja bolometrinen korjaus $BC = 0.5$. Laske Siriuksen säde.
- 5.10 Erään kaksoistähdien komponentin A näennäinen magnitudi on 5.2 ja komponentin B 6.2 mag. A:n efektiivinen lämpötila on 4250 K. Laske B:n efektiivinen lämpötila, kun komponenttien säteet ovat yhtäsuuret. Oletetaan, että $BC = 0$.

- 5.11 Auringon havaittu vuontiheys aallonpituudella $\lambda = 300 \text{ nm}$ on $0.59 \text{ W m}^{-2} \text{ nm}^{-1}$. Laske Auringon kirkkauslämpötila tällä aallonpituudella.
- 5.12 Väriämpötila voidaan määrätä kahden eri aallonpituudella mitatun magnitudin avulla. Osoita, että käytettäessä B - ja V -magnituduja (aallonpituudet 440 nm ja 548 nm) väriämpötila voidaan laskea kaavasta

$$T_c = \frac{7000 \text{ K}}{(B - V) + 0.47},$$

kun oletetaan, että $B = V$ spektriluokan A0 tähdille, joiden väriämpötila on noin 15000 K .

- 5.13 a) Plasman kineettinen lämpötila on 10^6 K . Laske elektronin keskimääräinen nopeus. (Esimerkiksi Aurinkoa ympäröivän harvan koronan lämpötila on tätä luokkaa.)
b) Mikä olisi taskulämpimän elektronin nopeus? ($T_k = 25^\circ\text{C}$).

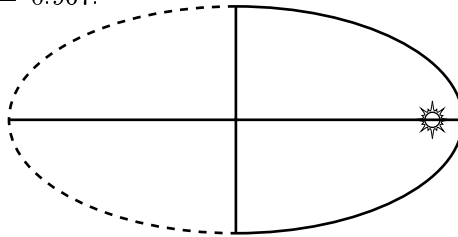


6 Taivaanmekaniikka

- 6.1 Laske Maan vetovoiman kiihtyvyys 350 km:n korkeudella maanpinnasta. Miksi avaruusaluksessa oleskeleva astronautti/kosmonautti tuntee itsensä painottomaksi?
- 6.2 Kappaleeseen vaikuttava voima on suunnattu aina samaa pistettä kohti, mutta on muuten täysin mielivaltainen. Osoita, että kappaleen rataimpulssimomentti on vakio.
- 6.3 Laske ympyräradalla liikkuvan planeetan ratanopeus ja impulssimomentti. Millä planeetalla on pienin impulssimomentti?
- 6.4 Saturnuksen B-renkaan massa on 10^{-16} Saturnuksen massaa, sisäreunan säde 121 000 km ja ulkoreunan 137 000 km. Laske renkaiden impulssimomentin suhde Saturnuksen pyörimisliikkeen impulssimomenttiin olettaen Saturnus homogeeniseksi palloksi (mitä se ei kyllä valitettavasti ole), jonka säde on 60 000 km ja massa 5.69×10^{26} kg. Saturnuksen pyörähdysaika on noin 10.5 tuntia.
- 6.5 Laske ratanopeuksien suhde $v_{\text{apheli}}/v_{\text{periheli}}$. Paljonko tämä on maapallolle?
- 6.6 Asteroidi Eros liikkuu radalla, jonka periheli on 1.1084 ja apheli 1.8078 astronomisen yksikön päässä Auringosta. Laske asteroidin nopeus sen ollessa Marsin keskietäisyydellä Auringosta.
- 6.7 Vakoilusatelliitti kiertää maapalloa napojen kautta kulkevalla ympyräradalla. Sen kiertoaika on $1\frac{1}{2}$ tuntia.
 a) Mikä on satelliitin korkeus maanpinnasta?
 b) Satelliitti ylittää Suomen viranomaisten sotilassalaisuutena varjeleman lentokoneiden varalaskupaikan Lusissa kello 12:00. Missä satelliitti on tullessaan seuraavan kerran samalla leveysasteelle? (Lentokentän leveys on $61^{\circ}18.5'$ ja pituus $26^{\circ}7'$.)
 c) Missä satelliitti on seuraavana päivänä kello 12:00?
- 6.8 Laske geostationaarisen (so. maasta katsoen paikoillaan pysyvän) satelliitin radan säde. Onko maapallolla alueita, joita ei voi nähdä mistään geostationaarisesta satelliitista? Jos on, niin kuinka suuri osa koko maapallon pinnasta?
- 6.9 Laske Auringon keskitiheys sen kulmaläpimitan ja vuoden pituuden avulla.
- 6.10 Laske pakonopeus Maan, Kuun, Jupiterin ja Auringon pinnalta.
- 6.11 Kivi paiskataan atmosfäärittömän planeetan pinnalta pystysuoraan ylöspäin nopeudella $v_e/\sqrt{2}$, missä v_e on pakonopeus. Kuinka korkealle kivi nousee? Jos kivi heitetään vaakasuoraan samalla nopeudella, kuinka kauas se lentää?

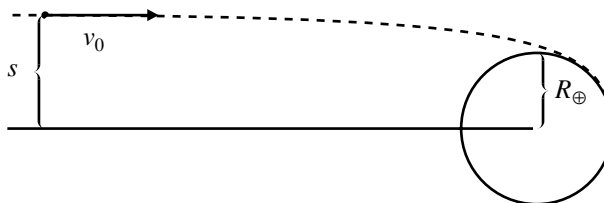


- 6.12 Kivi heitetään Maassa vaakasuoraan nopeudella 1 m s^{-1} . Mikä on lentoradan eksentrisyys? Mikä olisi perigeumetäisyys ja -nopeus, jos Maan massa olisi keskittynyt Maan keskipisteeseen? Ilmanvastusta ei oteta huomioon (eikä paljon muutakaan). Entä jos kivi vaihdetaan nopeudella 800 m s^{-1} lähtevään ammuksen?
- 6.13 Luotain liikkuu radalla, jonka apheli on 1 AU :n ja periheli 0.72 AU :n etäisyydellä Auringosta. Luotain saapuu Venukseen ollessaan ratansa perihelissä.
- a) Mikä on Maan ja Venuksen heliosentristen longitudien erotus laukaisu- ja saapumishetkellä? Oletetaan planeettojen radat ympyröiksi.
- b) Koska on yläkonjunktioita 7.4.1981 seuraava lähetysikkuna?
- c) Kuinka paljon luotaimen nopeus poikkeaa aphelissä Maan ja perihelissä Venuksen ratanopeudesta?
- 6.14 Kappaleen radan eksentrisyys on e . Kuinka suuren osan kiertoajastaan se viettää ratansa kauimmaisessa puoliskossa (kuvan katkoviivoitetulla osalla)? Sovella tulosta Halley'n komeettaan, jonka $e = 0.967$.



- 6.15 Laske maapallon keskianomalia sekä eksentriin ja luonnollinen anomalia neljännesvuoden kuluttua perihelistä.
- 6.16 Mars oli perihelissä 2.2.1981. Laske sen paikkavektori 2.2.1982. Piirrä tilanteesta kuva, johon merkitset paikkavektorin lisäksi kevättasauspisteen, perihelin ja nousevan solmun suunnat. Marsin nousevan solmun pituudelle voit käyttää arvoa $\Omega = 49.4^\circ$ ja perihelin pituudelle $\varpi = 335.7^\circ$.
- 6.17 Kaukana Maasta liikkuu meteoroidi nopeudella v_0 . Osoita energian ja impulssimomentin säilymisen avulla, että meteoroidi törmää maapalloon, jos

$$s \leq \sqrt{R_\oplus^2 + 2GM_\oplus R_\oplus / v_0^2}.$$



- 6.18 Komeetan nopeus sen ollessa äärettömän kaukana Auringosta on 5 m s^{-1} . Jos se liikkuisi suoraa pitkin, se ohittaisi Auringon 1 AU :n

päästä. Laske radan eksentrisyys, isoakselin puolikas ja periheli-
etäisyys. Mitä arvelet komeetalle tapahtuvan?

- 6.19 Laske pikkuplaneetta 1524 Joensuun rektaskensio ja deklinaatio
5.1.1985 kello 0 UT. Tarvittavat tiedot löydet seuraavista taulu-
koista. Ensimmäisessä taulukossa on rataelementtejä; M on kes-
kianomalia 1.12.1985 kello 0 ET (joka on likimain sama kuin UT)
ja μ on keskiliike asteina päivässä. Toisessa taulukossa on Aurin-
gon geosentrisiä ekvatoriaalisia koordinaatteja.

Эфемериды малых планет на 1985 год:

ELEMENTS
ECLIPTIC AND EQUINOX 1950.0
EPOCH 1985 DECEMBER 1.0 ET

Planet	$B(\alpha, 0)$	$B(l, 0)$	M	ω	Ω	i	e	μ	a
	m	m'	°	°	°	°		°	
1521 Seinäjoki	16.9	13.3	268.84759	47.42806	12.28890	15.05432	0.1382983	0.20452894	2.8529854
1522 Kokkola	16.2	13.7	298.83025	30.82862	60.18436	5.35227	0.0741248	0.27050363	2.3678489
1523 Pieksämäki	15.6	13.4	325.84244	187.15855	327.44671	5.14416	0.0941934	0.29359126	2.2420260
1524 Joensuu	16.0	11.9	165.02920	3.86717	347.71566	12.65318	0.1092830	0.17898617	3.1183371
1525 Savonlinna	16.5	13.2	173.23060	63.84178	279.41638	5.88346	0.2621869	0.22237075	2.6982630

Астрономический ежегодник СССР на 1985 год:

ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ КООРДИНАТЫ СОЛНЦА 1985

Дата	Об эфемеридного времени Среднее равноденствие 1985.0			
	$X_{1985,0}$	$Y_{1985,0}$	$Z_{1985,0}$	
Янв.	0	+0.1623843 ₊₁₇₂₂₀₉ ⁻⁵¹⁹	-0.8897251 ₊₂₈₉₈₁ ⁺²⁷⁶⁶	-0.3857825 ₊₁₂₁₈₁ ⁺¹²⁰⁰
	1	0.1796052 ₁₇₁₆₃₆ ⁵⁷³	0.8869170 ₃₀₈₃₄ ²⁷⁵³	0.3845644 ₁₃₃₇₆ ¹¹⁸⁵
	2	0.1967688 ₁₇₁₀₁₃ ⁶²³	0.8838336 ₃₃₅₇₇ ²⁷⁴³	0.3832268 ₁₄₅₆₅ ¹¹⁸⁴
	3	0.2138701 ₁₇₀₃₃₈ ⁶⁷⁵	0.8804759 ₃₆₃₀₆ ²⁷²⁹	0.3817703 ₁₅₇₄₉ ¹¹⁷⁸
	4	0.2309039 ₁₆₉₆₁₂ ⁷²⁶	0.8768453 ₃₉₀₂₃ ²⁷¹⁷	0.3801954 ₁₆₉₂₇ ¹¹⁷⁸
5*	+0.2478651 ₊₁₆₉₈₃₈ ⁻⁷⁷⁴	-0.8729430 ₊₄₁₇₂₆ ⁺²⁷⁰³	-0.3785027 ₊₁₈₀₉₈ ⁺¹¹⁷¹	
	0.2647489 ₁₆₆₀₁₄ ⁸²⁴	0.8687704 ₄₄₄₁₆ ²⁶⁹⁰	0.3766929 ₁₉₂₆₃ ¹¹⁶⁵	
	0.2815503 ₁₆₇₁₄₂ ⁸⁷²	0.8643288 ₄₇₀₉₁ ²⁶⁷⁵	0.3747666 ₂₀₄₂₃ ¹¹⁶⁰	
	0.2982645 ₁₆₆₂₂₃ ⁹¹⁹	0.8596197 ₄₉₇₅₅ ²⁶⁶⁴	0.3727243 ₂₁₅₇₅ ¹¹⁵²	
	0.3148868 ₁₆₅₂₅₅ ⁹⁶⁸	0.8546442 ₅₂₄₀₃ ²⁶⁴⁸	0.3705668 ₂₂₇₂₂ ¹¹⁴⁷	



7 Aurinkokunta

- 7.1 Siirtyykö Venus suurimmasta itäisestä elongaatiosta suurimpaan läntiseen elongaatioon nopeammin vai hitaammin kuin läntisestä itäiseen? Perustele vastaus kuvien avulla.
- 7.2 Mikä on suurin mahdollinen elongaatio seuraaville planeetoille: Merkurius, Venus, Mars? Kuinka monta tuntia likimäärin planeetta on tällöin näkyvässä ennen auringonnousua tai auringonlaskun jälkeen? Oletetaan Auringon ja planeetan deklinaatioksi $\delta = 0^\circ$.
- 7.3 a) Mikä on Venuksen suurin mahdollinen geosentrinen leveys, ts. kuinka kaukana Auringon suunnasta Venus voi näkyä alakonjunktion aikaan? Oletetaan Venuksen ja Maan radat ympyröiksi.
b) Venuksen radan nousevan solmun pituus on 77° . Milloin a)-kohdan tilanne suunnilleen voi sattua?
c) Milloin Venus voi näkyä Auringon pinnan edessä (ylikulku)?
- 7.4 Voiko täydellinen auringonpimennys sattua, kun Kuu on a) apogeumissa, b) keskietäisyydellään Maasta? Voiko pimennys olla rengasmaainen, kun Kuu on perigeumissa?
- 7.5 a) Laske Maan varjon halkaisija Kuun etäisyydellä Maasta.
b) Kuinka kauan täydellinen kuunpimennys voi kestää?
- 7.6 a) Kuun etäisyys Maan keskipisteestä oli efemeridien mukaan

27.11.1981	$63.75R_\oplus$
11.12.1981	$55.94R_\oplus$

missä $R_\oplus = 6378 \text{ km}$ =Maan ekvaattorisäde. Mikä oli Kuun näennäinen läpimitta mainittuina päivinä? Kuun säde on 1738 km .

b) Laske Kuun suurin ja pienin etäisyys Maasta sen rataelementtien avulla ($a = 384400 \text{ km}$, $e = 0.055$). Vertaa tuloksia a)-kohdan arvoihin. Mitä huomaat? Selitys??

- 7.7 Erään planeetan kahden peräkkäisen opposition välinen aika on 398.9 vuorokautta. Oppositionissa planeetan näennäiseksi kulmaläpimitaksi on saatu $47.2''$. Laske planeetan sideerinen kiertoaika, radan isoakselin puolikas ja planeetan todellinen läpimitta kilometreissä. Mikä planeetta on kyseessä?
- 7.8 a) Kolmen eri ympyräradoilla liikkuvan kappaleen kulmanopeudet (eli keskilikkeet) ovat n_1 , n_2 ja n_3 . Osoita, että näillä kolmella kappaleella on synodinen jakso, jos ja vain jos on olemassa nollasta eroavat kokonaisluvut k_1 , k_2 ja k_3 siten, että

$$k_1 n_1 + k_2 n_2 + k_3 n_3 = 0,$$

$$k_1 + k_2 + k_3 = 0.$$



(Synodinen jakso tarkoittaa aikaväliä, jonka kuluttua kappaleiden muodostama kuvio toistuu samanlaisena vaikkakin mahdollisesti eri suunnassa keskuskappaleesta katsottuna.)

b) Jupiterin kolmen Galilein kuun keskiliikkeiden välillä on yhtälö

$$n_{\text{Io}} - 3n_{\text{Europa}} + 2n_{\text{Ganymedes}} = 0.$$

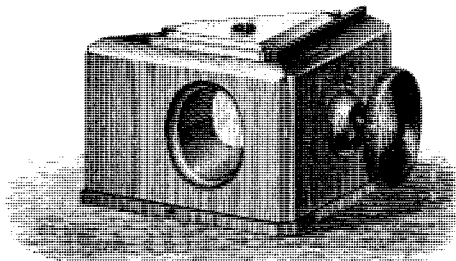
Laske näiden kuuden synodinen jakso.

- 7.9 Merkuriuksen sideerinen pyörähdysaika on 58.6 d ja Venuksen 243.1 d (retrogradiseen suuntaan). Kiertoajat Auringon ympäri ovat vastaavasti 0.241 a ja 0.615 a. Laske vuorokauden pituus kummallakin planeetalla.
- 7.10 Pluton kuun Charonin kiertoaika on 6.39 d ja radan isoakselin puolikas 20 000 km. Laske Pluton massa ja tiheys, kun tiedetään, että Pluton halkaisija on 2500 km ja Kharonin halkaisija on 1500 km. Oletetaan, että molempien tiheys on sama.
- 7.11 Asteroidi 22 Kalliopen UBV-fotometrisissä havainnoissa saatiin allaolevassa taulukossa annetut magnitudit.
- a) Piirrä valokäyrä ja määrää siitä valonvaihtelun suuruus magnitudeina.
Mistä valonvaihtelu johtuu?

T(UT)	V	T(UT)	V	T(UT)	V
20:30	7.31	22:30	7.29	00:30	7.31
20:45	7.35	22:45	7.32	00:45	7.35
21:00	7.31	23:00	7.30	01:00	7.32
21:15	7.28	23:15	7.26	01:15	7.29
21:30	7.26	23:30	7.22	01:30	7.26
21:45	7.21	23:45	7.20	01:45	7.22
22:00	7.24	00:00	7.20	02:00	7.21
22:15	7.27	00:15	7.27	02:15	7.24

- 7.12 a) Laske oppositiossa olevan ulkoplaneetan takenevan liikkeen suuruus vuorokauden aikana. Oletetaan, että planeettojen radat ovat ympyröitä.
- b) Pluto löydettiin vuonna 1930 kahdesta 6 vuorokauden välein lähellä Pluton oppositiota otetusta valokuvauslevystä. Ko. levyillä yhtä astetta vastasi 3 cm. Miten paljon Pluto oli liikkunut kuvien oton välillä? Paljonko tyypillinen asteroidi liikkuu samassa ajassa?
- 7.13 Maasta havaitaan planeettaa sen ollessa oppositiossa tai alakonjunktiossa. Valon äärellisen nopeuden vuoksi planeetta on havaintohetkellä ehtinyt siirtyä havaitusta suunnasta. Laske tämä suunnan muutos planeetan radan säteen funktiona. Voit olettaa radat ympyröiksi. Millä planeetalla on suurin poikkeama ja kuinka suuri se on?
- 7.14 Jos auringonpimennyksessä Kuu peittää Auringon halkaisijasta osan x ($x \in (0,1]$), kuinka suuri osa p Auringon pinta-alasta on peittyneenä? Oletetaan Auringon ja Kuun näennäiset halkaisijat yhtä suuriksi. Laske p 20.7.1982 tapahtuneelle pimennyksel-

- le, kun Helsingistä nähtynä Auringon halkaisijasta oli peittyneenä osa $x = 0.39$. Mikä oli tuolloin Auringon näennäinen magnitudi?
- 7.15 Kuun kulmaläpimitta Maasta katsottuna on 0.5° . Täydenkuun näennäinen magnitudi on -12.5 ja Auringon -26.7 . Laske Kuun geometrinen ja Bondin albedo. Oletetaan, että Kuu heijastaa kaiken valon isotrooppisesti avaruuskulmaan 2π steradiaania (mikä ei kylläkään pidä paikkaansa).
- 7.16 Merkuriuksen ellipsiradan eksentrisyys on $e = 0.206$. Paljonko Auringon näennäinen magnitudi vaihtelee Merkuriuksesta nähtynä? Miten Auringon pintakirkkaus vaihtelee?
- 7.17 100 metrin läpimittainen asteroidi lähestyy Maata nopeudella 30 km s^{-1} . Laske asteroidin näennäinen magnitudi a) viikkoa, b) päivää ennen sen törmäämistä maapalloon. Oletetaan, että vaihekulma on $\alpha = 0^\circ$ ja asteroidin geometrinen albedo $p = 0.1$. Mitä arvelet mahdollisuuksista havaita tällainen asteroidi hyvässä ajoin etukäteen? Arvioi, kuinka paljon törmäyksessä vapautuu energiaa ja millaista pommia se vastaa. (Pommien voimakkuudet ilmoitetaan usein vertaamalla niitä yhden TNT-tonnin räjähtäessä vapautuvaan energiaan, joka on $4.184 \times 10^9 \text{ J}$.)
- 7.18 Piirrä vesihöyryn osapaineen muutos maapallon ilmakehässä korkeuden funktiona. Millä korkeudella osapaine on pudonnut puoleen pinnalla olevasta arvosta?
- 7.19 Laske komeetan lämpötila sen ollessa a) 10 AU:n, b) 1 AU:n, c) 0.5 AU:n päässä Auringosta. Oletetaan komeetan Bondin albedoksi 0.05.
- 7.20 Valaisevat yöpilvet ovat kymmenien kilometrien korkeudessa ilmakehässä leijuvia ohuita pilviä, jotka näkyvät Auringon paistaessa niihin. Parhaiten yöpilviä voi nähdä syyskesällä pohjoisen suunnalla.
Valaiseva yöpilvi näkyy pohjoisessa 10 asteen korkeudella. Aurinko on samalla hetkellä pohjoisessa 12° taivaanrannan alapuolella. Laske pilven korkeus maanpinnasta.

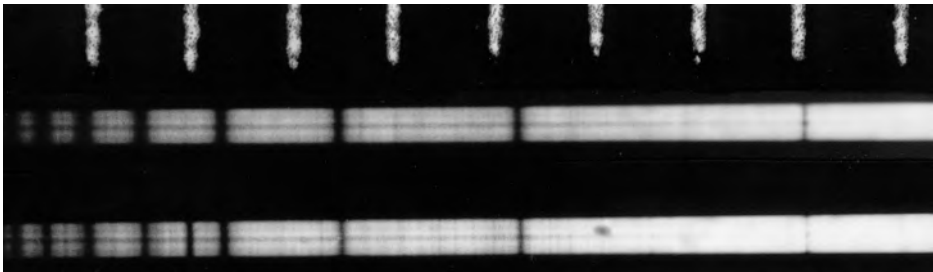


8 Tähtien spektrit

- 8.1 Alla on osa erään pääsarjan tähden spektristä. Kuvaan on merkitty vedyn Balmerin sarjan viivat H_γ (434.0 nm), H_δ (410.2 nm), H_ϵ (397.0 nm) ja H_ζ (388.9 nm).



- a) Laske spektrin dispersio kolmen viivaparin avulla. Ilmoita myös mittausten keskiarvo.
- b) Näkyvätkö seuraavat viivat tähden spektrissä:
 neutraali helium He I, $\lambda = 402.6$ nm,
 ionisoitunut kalsium Ca II, $\lambda = 393.4$ nm (K-viiva).
- c) Päättelä likimain tähden spektriluokka.
- 8.2 Alla on kaksi Turun 70 cm:n Schmidt-teleskoopin objektiivipris-
 malla kuvattua spektriä. Spektrien aallonpituusväli on noin
 380 – 500 nm. Kuva on osasuurennus valokuvauslevystä; kuvaan
 valotettujen poikkiviivojen väli on todellisuudessa 1 mm.



- a) Prismän dispersio riippuu aallonpituudesta. Jos kahden viivan aallopituudet ovat λ_1 ja λ_2 , niiden välimatka levyllä on

$$d = A \left(\frac{1}{\lambda_1^2} - \frac{1}{\lambda_2^2} \right).$$

Määrää vakio A käyttämällä useampia viivapareja. Ilmoita dispersio erikseen sinisessä ja punaisessa päässä. 1 on spektriluokan B3 V tähti ja siinä erottuvat selvästi Balmerin sarjan viivat.

- b) Edustaako alempi spektri aikaisempaa vai myöhäisempää spektriluokkaa kuin ylempi? Perustele vastausta.

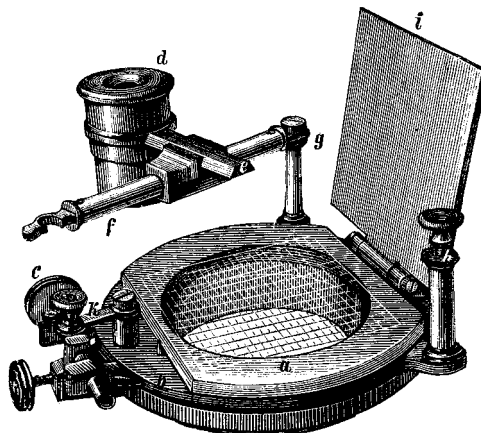
9 Kaksoistähdet ja tähtien massat

- 9.1 Kaksi auringonmassaista tähteä kiertää toisiaan ympyräradalla 1 AU:n etäisyydellä toisistaan. Tähtiä katsotaan niiden ratatason suunnasta, jolloin niiden yhteisen spektrin viivat jakaantuvat jaksollisesti kahtia. Laske tähtien H_γ -viivojen aallonpituuksien suurin mahdollinen erotus, kun viivan lepoaallonpituus on 434.05 nm.
- 9.2 Kaksoistähden trigonometrinen parallaksi on $0.1''$, komponenttien kulmaetäisyys suurimmillaan $5''$ ja periodi 50 a. Laske kaksoistähden massa.
- 9.3 Kaksoistähden komponenttien massat ovat $1 M_\odot$ ja $3 M_\odot$. Mikä on niiden välinen etäisyys, kun kiertoaika on 50 a ja suhteellinen rata on ympyrä?
- 9.4 a) M -massaista tähteä kiertää ympyräradalla m -massainen planeetta etäisyydellä a . Tähti kiertää systeemin painopisteen ympäri etäisyydellä a' . Osoita, että

$$MP^2 = a^2(a - a'),$$

missä P on kiertoaika vuosina, $[a] = [a'] = \text{AU}$, $[M] = [m] = M_\odot$.

b) Barnardin tähden etäisyys on 1.83 pc ja massa $0.135 M_\odot$. Sen havaitaan heilahtelevan 25 vuoden jaksoissa amplitudilla $0.026''$. Jos tämä liike johtuu tähteä kiertävästä planeetasta, mikä on planeetan massa ja radan säde?



10 Tähtien rakenne

10.1 Laske energiantuotto massayksikköä kohti seuraavissa reaktioissa:

- a) $4\ ^1\text{H} \rightarrow\ ^4\text{He}$,
 b) $3\ ^4\text{He} \rightarrow\ ^{12}\text{C}$,
 c) $2\ ^{28}\text{Si} \rightarrow\ ^{56}\text{Fe}$.

Huomaa, että atomit ovat täysin ionisoituneita.

10.2 a) Montako pp-reaktiota Auringossa tapahtuu sekunnissa? Auringon luminositeetti on 3.9×10^{26} W, protonin massa $m_p = 1.007280$ amu ja α -hiukkasen massa $m_\alpha = 4.001514$ amu. Yksi amu on 1.6604×10^{-27} kg.

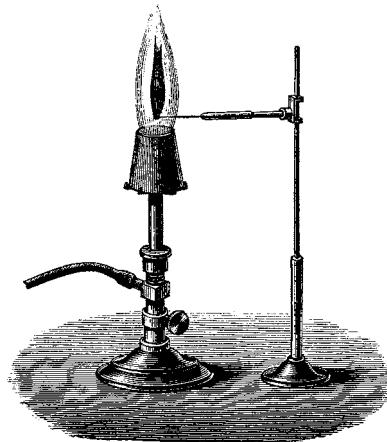
b) Montako pp-reaktioissa syntynyttä neutriinoa osuu maapalloon sekunnissa?

10.3 Neutriinon massa-absorptiokerroin on $\kappa = 10^{-21}$ m² kg⁻¹. Laske neutriinon vapaa matka Auringon keskustassa ja vertaa tätä Auringon säteeseen.

10.4 Oletetaan, että tähden tiheysjakautuma on

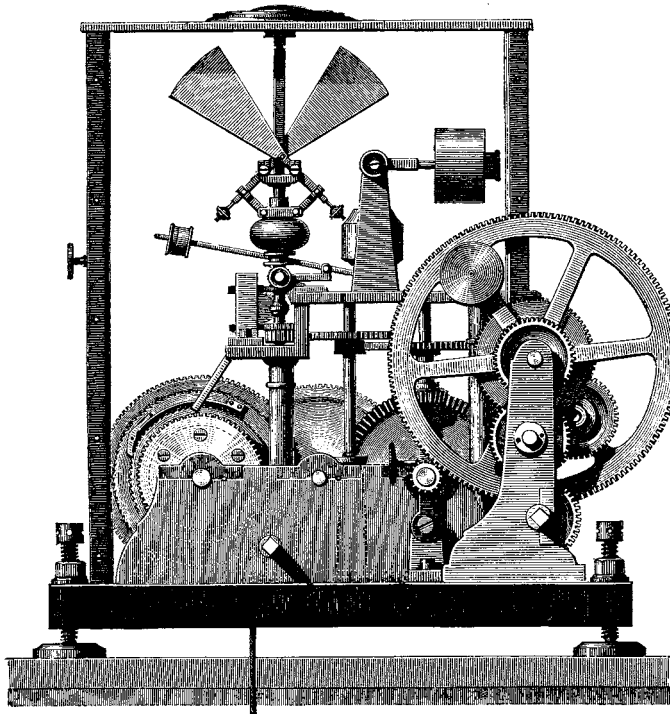
$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{R^2} (R - r)^2,$$

missä R on tähden säde ja ρ_0 tiheys keskustassa. Laske paine etäisyydellä r keskipisteestä.



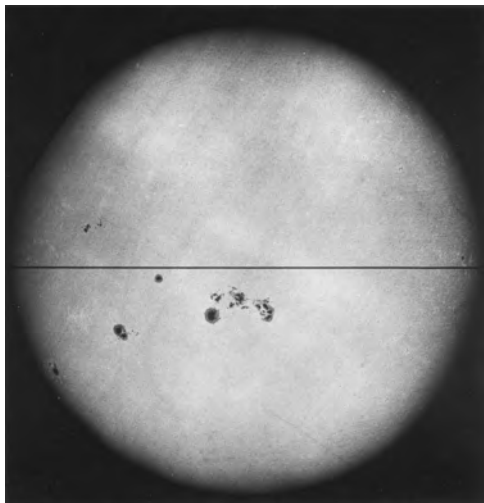
11 Tähtien kehitys

- 11.1 Laske vapaan kutistumisen aikaskaala vetypilvelle, jossa H_2 -molekyylien tiheys on $n = 3000 \text{ cm}^{-3}$. Oletetaan, että tähdet syntyvät kutistumalla tällaisista vetypilvistä. Laske montako keskimäärin auringonmassaista tähteä Linnunradassa syntyy vuodessa, kun oletetaan, että pilviä on 100 kappaletta, pilven massa on $5 \times 10^4 M_\odot$ ja 10 % pilven massasta muuttuu tähdiksi.
- 11.2 Vegan (spektriluokka A0V) massa on $2 M_\odot$, säde $3 R_\odot$ ja luminositeetti $60 L_\odot$. Laske sen terminen aikaskaala ja ydinaikaskaala.
- 11.3 Oletetaan, että tähti viettää pääsarjassa 10 miljardia vuotta ja polttaa 10 % vetyvarastostaan. Sitten tähdestä tulee nopeasti punainen jättiläinen ja sen luminositeetti kasvaa 100-kertaiseksi. Kuinka kauan jättiläisvaihe kestää, jos oletetaan, että sen aikana palaa yksinomaan jäljellä oleva vetyvarasto?



12 Aurinko

- 12.1 Aurinkovakio eli Auringon säteilyvuon tiheys maapallolla on 1390 W m^{-2} .
- a) Laske vuontiheys Auringon pinnalla, kun Aurinko näkyy maahan $32'$ kulmassa.
- b) Kuinka suurelta alueelta Auringon pinnalta voisi kerätä 1000 megawatin tehon?
- 12.2 Loviisan ydinvoimalalle on varattu noin 5 hehtaaria maata. Alueelle mahtuisi neljä 700 megawatin voimalaa. Montako vieriviereen rakennetuilla voimaloilla peitettyä maapalloa tarvittaisiin Auringon tehon tuottamiseen?
- 12.3 Eräiden teorioiden mukaan Auringon efektiivinen lämpötila 4.5 miljardia vuotta sitten oli 5000 K ja säde 1.02 kertaa nykyinen säde. Laske aurinkovakion arvo tuohon aikaan. Maan radan säteen oletetaan pysyneen koko ajan vakiona.
- 12.4 Määrää auringonpilkkuluku allaolevasta kuvasta. Oletetaan, että henkilökohtainen korjauskerroin on $C = 1$.



- 12.5 Osoita, että auringonpilkkut eivät voi olla Aurinkoa kiertäviä planeettoja.

13 Muuttuvat tähdet

- 13.1 δ Cephein näennäinen visuaalinen magnitudi vaihtelee välillä $3.7 \leq m_V \leq 4.6$. Periodi on 5.36634 d. Laske tähden etäisyys.
- 13.2 RR Lyrae -tähtien absoluuttinen visuaalinen magnitudi on 0.6 ± 0.3 . Kuinka suuri on tästä magnitudien hajonnasta aiheutuva etäisyyden suhteellinen virhe?
- 13.3 Pitkäperiodinen muuttuja on maksimissaan 1.0 (bolometristä) magnitudia kirkkaampi kuin minimissä. Efektiivinen lämpötila maksimissa on 4500 K. Kuinka suuri on T_e minimissä, jos koko muutos johtuu lämpötilan muutoksesta? Jos taas lämpötila ei muutu, kuinka suuri on säteen suhteellinen muutos?
- 13.4 Mira-tähden efektiivinen lämpötila on noin 2000 K.
- Kuinka suuri osa säteilystä tulee näkyvän valon aallonpituusalueessa [400 nm, 700 nm]?
 - Jos visuaalimagnitudin vaihtelu $\Delta m = 6$ mag aiheutuisi pelkästään lämpötilan vaihteluista, kuinka suuri pitäisi lämpötilan muutoksen olla?
- 13.5 Rapsun säde on noin $3'$ (vuonna 1983) ja se laajenee $0.21''$ vuodessa. Sumussa on havaittu keskustähteen nähden 1300 km s^{-1} radiaalinopeuksia.
- Laske sumun etäisyys, kun oletetaan laajenemisen tapahtuvan pallosymmetrisesti.
 - Rapsun kohdalla on havaittu supernovan leimahdus. Milloin se on suunnilleen tapahtunut? (Älä luntaa historian kirjasta, vaan laske!)
 - Mikä on ollut supernovan näennäinen magnitudi, jos sen absoluuttinen magnitudi on ollut supernovalle tyypillinen -18 ?
- 13.6
- Jos Linnunradassa räjähtää tyyppin I supernova 200 vuoden välein ja tyyppin II supernova 40 vuoden välein, niin kuinka usein keskimäärin räjähtää supernova?
 - Viimeinen havaittu supernova Linnunradassa havaittiin vuonna 1604 (Keplerin supernova). Mikä on todennäköisyys, että vuoteen 1986 mennessä olisi räjähtänyt tämän jälkeen ainakin yksi supernova? Kysymyksessä on Poissonin prosessi, jossa

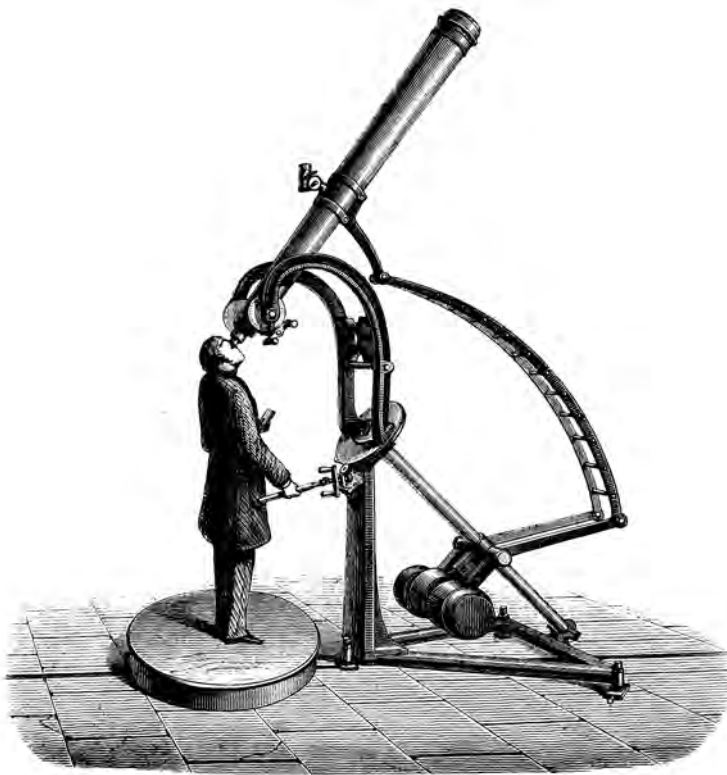
$$P(X_t = k) = \frac{(t/T)^k}{k!} e^{-t/T}$$

on todennäköisyys, että tapahtuma, jonka keskimääräinen toistumisväli on T , tapahtuu täsmälleen k kertaa ($k = 0, 1, 2, \dots$) aikavälillä $[0, t]$.

- 13.7 Vuonna 1987 Suuresta Magellanin pilvestä havaittiin supernova, jonka neutriinovuoto Maassa oli noin 1.3×10^{14} neutriinoa neliömet-



riä kohti. Neutriinon keskimääräinen energia oli 4.2 MeV. Kuinka paljon energiaa kaiken kaikkiaan vapautui neutriinoiden muodossa?



14 Kompaktit tähdet

- 14.1 Pulsarin 1973 + 214 periodi on 0.0016 s.
- Laske pulsarin pinnan nopeus ekvaattorilla, jos tähden säde on 10 km.
 - Mikä on keskeiskiihtyvyyden ja gravitaatiokiihtyvyyden suhde ekvaattorilla, jos tähden massa on $1 M_{\odot}$?
- 14.2 Pulsarin massa on $1.5 M_{\odot}$, säde 10 km ja pyörähdysaika 0.033 s. Laske pulsarin impulssimomentti. Pyörähdysajassa tapahtuu 0.0003 s vaihteluita. Jos ne johtuvat tähden säteen muutoksista ("tähtenjärityksistä"), kuinka suuria ovat nämä muutokset?
- 14.3 Eräessä tieteisromaanissa (Robert L. Forward: *Dragon's Egg*, suosittelemme, ilmestynyt myös suomeksi Ursan kustantamana) avaruusalus kiertää neutronitähteä radalla, jonka säde on 406 km. Kiertoaika on sama kuin tähden pyörähdysaika 0.1993 s.
- Laske tähden massa ja alukseen kohdistuva vetovoiman kiihtyvyyys.
 - Miten vetovoima vaikuttaa 175 cm mittaiseen astronauttiin tämän seistessä suorana jalat kohti tähteä? Entä jos astronautti loikoilee radan tangentin suuntaisena?
- 14.4 Laske protonin kokoisen ($r = 10^{-14}$ m) mustan aukon massa. Paljonko energiaa vapautuu, kun tällainen "miniaukko" höyrystyy ja muuttuu silkaksi energiaksi?
- 14.5 Fotoni lähtee tähden pinnalta taajuudella ν_e ja saapuu äärettömän kaukana olevan havaitsijan silmään taajuudella ν . Matkalla fotoni punertuu siten, että muutos fotonin energiassa $h\nu$ on yhtä suuri kuin potentiaalienergian muutos. Johda yhteys ν_e :n ja ν :n välille, kun fotoni on peräisin M -massaisen R -säteisen tähden pinnalta. Kuinka paljon punertuu Auringon valo matkallaan Maahan?
- 14.6 Neutronitähden massa on $2 M_{\odot}$ ja säde 8 km. Pinnalle on asennettu liikennevalot, joissa on päällekkäin kolme punaista lampua. Alin näkyy punaisena, koska se on keskimääräisen kulkijan silmien korkeudella. Seuraavan lampun valo sinisiirtyy ja näkyy keltaisena. Ylimmän lampun valo sinertyy vielä enemmän ja näkyy vihreänä. Kuinka suuri on oltava punaisen ja "vihreän" lampun välinen korkeusero?
- 14.7 Mustan aukon massa on 10 Auringon massaa ja pyörähdysaika 2 sekuntia. Röntgensäteilyä emittoituu 0.8 Schwarzschildin säteen etäisyydeltä aukon keskipisteestä aallonpituudella 1 nm. Mikä on säteilyn aallonpituus sen saapuessa 10 parsekin päässä olevan havaitsijan silmään, kun interstellaarista punertumista ei oteta huomioon?

15 Tähtienvälinen aine

- 15.1 Miksi kylmän ja tiheän interstellaarisen vetypilven sisäosissa ei esiinny säteilyä, jonka aallonpituus on pienempi kuin eräs λ_0 ? Mikä on λ_0 ?
- 15.2 Magneettikenttä, jonka magneettivuon tiheys on \mathbf{B} , vaikuttaa nopeudella \mathbf{v} liikkuvaan varaukseen q voimalla $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$. Magneettikenttää vastaan kohtisuorassa suunnassa liikkuva varaus kiertää tällöin ympyrärataa. Laske tämän radan säde tähtienvälisessä magneettikentässä liikkuvalla protonille, jonka liikeenergia on 1 MeV. Magneettivuon tiheys on $B = 10^{-10}$ T.
- 15.3 Oletetaan, että interstellaarinen pilvi koostuu useista erillisistä ”pilvkeistä”, jotka täyttävät koko pilven tilavuudesta yhteensä osan f ($f \in [0,1]$). Osoita, että tiheydelle ρ pätee

$$\langle \rho \rangle^2 = f \langle \rho^2 \rangle,$$

missä $\langle x \rangle$ tarkoittaa suureen x keskiarvoa koko pilvessä.

- 15.4 Olkoon tähtienvälisen molekyyli­pilven lämpötila $T_k = 30$ K. Tässä lämpötilassa CO-molekyylin viritystilat ovat pyörimisliikkeen energiatiloja J , joiden energia on $E_J = J(J+1)hB$, missä $B = 57.6$ GHz, h on Planckin vakio ja J on pyörimisliikkeen kvanttiluku $J = 0,1,2, \dots$. Laske, kuinka suuri osa CO-molekyyleistä on perustilassa $J = 0$, kun eri energiatilojen miehitysluvut n_J noudattavat Boltzmannin jakautumaa

$$\frac{n_J}{n_0} = \frac{g_J}{g_0} e^{-E_J/kT_k},$$

missä g_J on tilan J degeneraatio, joka pyörimisliikkeen tapauksessa on $g_J = 2J + 1$.

- 15.5 Tähdessä lähetyillä olevaan pieneen pölyhiukkaseen kohdistuu säteily­paine aiheuttama voima \mathbf{F}_{rad} , joka työntää hiukkasta pois­päin tähdestä ja on verrannollinen tähden säteilyn vuontiheyteen. Jos pölyhiukkasen etäisyys tähdestä on r ja tähden luminositeetti L , on säteilyn vuontiheys $L/4\pi r^2$, joten $\mathbf{F}_{\text{rad}} = k/r^2$, missä k on vakio. Osoita, että jos hiukkanen lähtee levosta etäisyydeltä r_0 , hiukkasen nopeus lähenee lopulta tiettyä raja-arvoa $v_\infty = \sqrt{2k/mr_0}$, missä m on hiukkasen massa.
- 15.6 Tarkastellaan lähellä Linnunradan tasoa olevia interstellaarisia pölypilviä. Oletetaan, että pilvien lukumäärä näkö­säteellä on jakautunut satunnaisesti niin, että näkö­säde leikkaa k pilveä pituusyksikköä kohti (esim $[k] = \text{kpc}^{-1}$). Todennäköisyys $p(n)$, että välillä $[0,r]$ näkö­säde leikkaa tasan n pilveä, on silloin

$$p(n) = \frac{(kr)^n e^{-kr}}{n!}, \quad n = 0,1,2,\dots$$

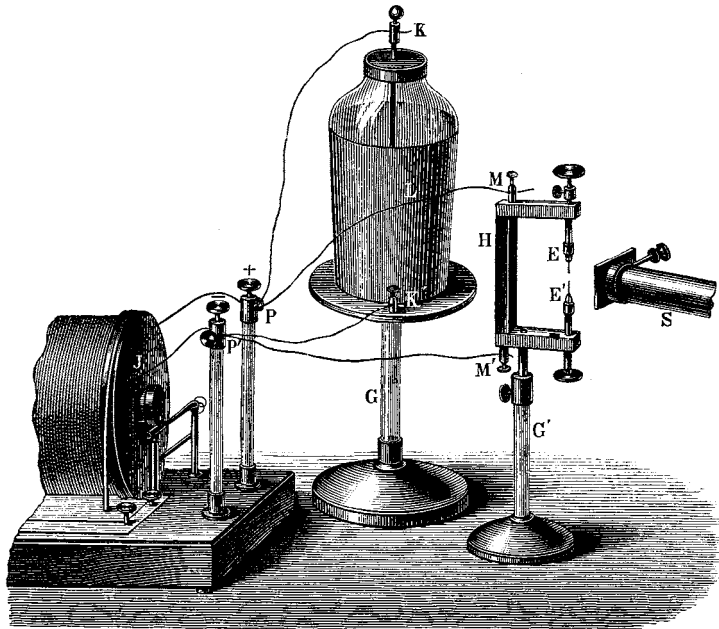


Tämä on Poissonin jakauma (vrt. 13.6). Oletetaan, että kukin pilvi aiheuttaa takaa tulevaan säteilyyn värieksessin E_0 . Osoita, että kun tarkastellaan eri suunnissa kiinteällä välillä $[0, r]$ olevia pilviä, voidaan E_0 ja k määrätä havaitun kokonaisvärieksessin E_{B-V} ja sen neliön E_{B-V}^2 keskiarvojen avulla seuraavasti:

$$E_0 = \frac{\langle E_{B-V}^2 \rangle}{\langle E_{B-V} \rangle} - \langle E_{B-V} \rangle ,$$

$$k = \frac{\langle E_{B-V} \rangle}{r E_0} .$$

- 15.7 Juuri syntynyt O-luokan tähti, jonka pintalämpötila on 32000 K, valaisee 0.01 parsekin päässä olevaa pölypilvää. Mikä on pölyhiukkasten lämpötila, jos niiden albedo on likimain nolla?



16 Tähtijoukot ja assosiaatiot

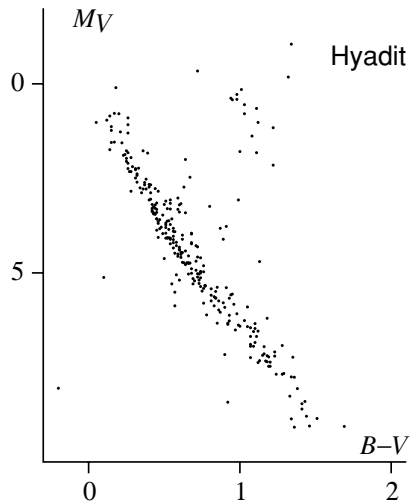
- 16.1 Pallomaiseen joukkoon kuuluu 100 000 tähteä, jotka ovat absoluuttisesti keskimäärin yhtä kirkkaita kuin Aurinko. Laske joukon näennäinen magnitudi, jos sen etäisyys on 10 kpc.
- 16.2 Seuraavissa taulukoissa on kahden tähtijoukon tähtien näennäiset magnitudit ja värit ($B - V$).
- a) Piirrä joukkojen HR-diagrammat (mieluummin läpinäkyvälle paperille).
- b) Aseta kuvat päällekkäin ja siirtele niitä pystysuunnassa, kunnes pääsarjat yhtyvät. Näin saat mahdollisimman pitkä pääsarjan. Käytä hyväksi myös alla olevaa Hyadien HR-diagrammaa. (Hyadien diagramma perustuu Hipparcos-luettelon tietoihin.) Määrää nollaiän pääsarja ZAMS ja joukkojen iät.
- c) Hyadien avulla saat selville absoluuttiset magnitudit. Määrää niiden avulla joukkojen etäisyydet.

NGC2477

V	$B - V$	V	$B - V$	V	$B - V$	V	$B - V$	V	$B - V$
12.47	1.24	14.34	0.63	13.92	0.62	11.36	1.06	12.04	1.28
13.65	-0.16	11.81	1.28	14.09	0.66	10.84	0.68	14.35	0.66
11.66	1.20	11.96	1.21	13.40	0.54	11.46	1.44	13.13	0.55
12.76	1.22	12.28	1.18	13.42	0.61	13.15	0.55	10.72	0.17
12.05	1.22	12.63	1.26	14.49	1.89	14.01	0.61	10.83	0.96
12.33	1.20	11.49	1.44	14.46	0.63	12.62	0.57	14.27	0.66
12.18	1.23	11.40	1.55	13.87	0.82	13.38	0.80	14.71	0.70
13.69	0.66	11.42	1.58	13.57	0.63	13.79	0.63	14.16	1.14
9.81	1.88	11.96	1.22	13.63	0.69	16.59	1.03	13.84	0.58
12.08	1.27	11.85	1.20	13.80	0.66	11.32	1.47	12.21	1.20
12.11	1.26	13.27	0.58	13.93	0.65	13.44	0.66	13.79	0.56
12.56	1.17	14.57	0.62	13.38	0.58	13.04	0.52	14.63	0.68
13.37	0.94	15.23	0.81	13.82	0.61	14.40	0.60	13.09	0.51
11.94	0.58	13.99	0.63	11.62	1.19	12.86	0.74	13.58	0.51
11.61	1.25	13.68	0.64	10.61	0.99	13.51	0.60	13.27	0.48
14.25	0.58	14.86	0.72	13.41	0.59	12.85	0.50	15.18	0.67
11.41	1.42	14.04	0.67	14.74	0.66	14.55	0.63	14.80	0.68
12.55	1.20	14.55	0.71	14.30	0.71	12.89	0.50	14.03	0.57
10.81	1.24	13.25	0.58	13.34	0.73	11.61	1.23		
13.86	0.64	13.19	0.81	12.23	1.19	15.07	0.69		

NGC1039

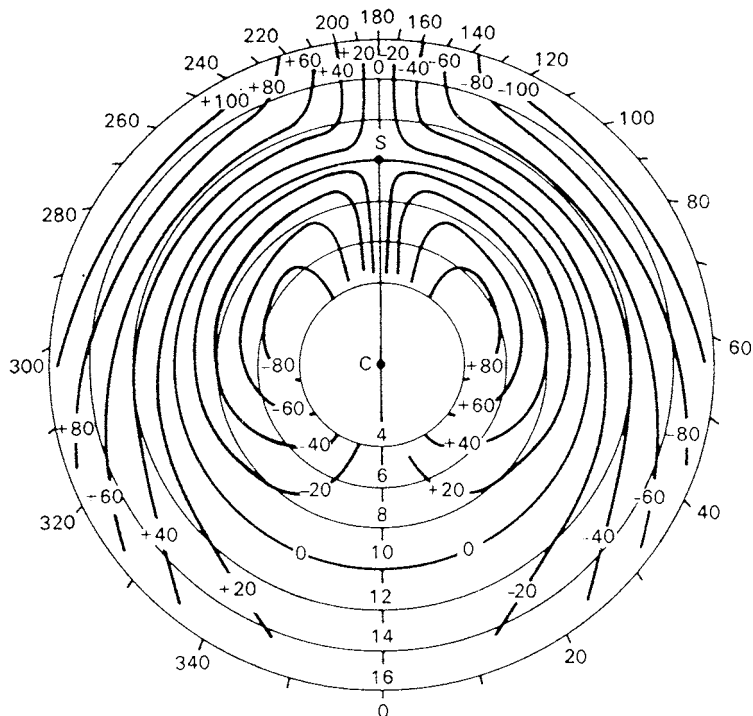
V	$B-V$	V	$B-V$	V	$B-V$	V	$B-V$	V	$B-V$
9.64	0.034	11.21	1.088	11.45	0.351	7.94	-0.003	11.50	0.36
9.46	0.540	10.46	0.201	9.72	0.17	8.80	0.060	7.33	0.944
11.94	0.47	11.21	0.35	11.77	0.278	9.30	0.053	11.45	0.414
10.93	0.27	12.20	0.645	9.89	0.098	10.45	0.2	10.27	0.136
8.82	0.03	8.98	0.001	8.33	-0.006	11.45	0.38	8.26	0.01
10.51	0.198	11.47	0.36	10.74	0.276	11.97	0.677	10.28	0.143
10.31	0.134	11.13	1.046	11.18	0.342	8.85	0.028	10.93	0.156
10.10	0.11	8.52	0.001	10.01	0.115	10.96	0.954	10.63	0.531
8.48	0.051	8.46	0.008	9.93	0.116	9.31	0.049	9.56	0.06
10.46	0.164	11.95	0.469	11.09	0.398	10.97	1.012	8.89	-0.02



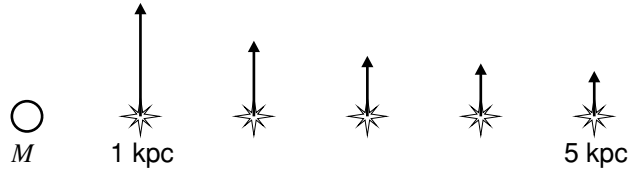
- 16.3 Hahmottele HR-diagramma tähtijoukolle, jonka ikä on 200 miljoonaa vuotta. Huomaa, että joukon tähdet ovat syntyneet suunnilleen samaan aikaan.

17 Linnunrata

- 17.1 Aurinko kiertää Linnunradan keskusta nopeudella 220 km s^{-1} pitkän ympyrärataa, jonka säde on noin 8.5 kpc .
- Kuinka suuri massa on Auringon radan sisään jäävällä Linnunradan osalla?
 - Mikä on pakonopeus Auringon etäisyydellä Linnunradan keskustasta?
 - Kuinka suuri on Auringon keskeiskiihtyvyys?
- 17.2 Oletetaan, että Auringon etäisyys Linnunradan keskustasta tunnetaan, mutta nopeudeksi on saatu 10 % virheellinen arvo. Kuinka paljon tämän perusteella laskettu Linnunradan massa poikkeaa oikeasta?
- 17.3 Radiohavaintojen avulla on suunnassa $\ell = 310^\circ$ sijaitsevalle HII-alueelle mitattu radiaalinopeudeksi -80 km s^{-1} . Mikä on alueen etäisyys? Vertaa tulosta allaolevaan kuvaan, johon on piirretty radiaalinopeuden tasa-arvokäyrät. Selitys ristiriitaan?



- 17.4 a) Pallomainen joukko kiertää Linnunrataa 15 kpc:n keskietäisyydellä. Mikä on joukon kiertoaika?
 b) Pallomaiset tähtijoukot liikkuvat yleensä hyvin eksentrisillä radoilla. Missä joukot viettävät suurimman osan ajastaan? Kumpia on mielivaltaisella ajanhetkellä enemmän, hitaasti vai nopeasti liikkuvia joukkoja?
- 17.5 Oletetaan, että Aurinko ja jokin tähti kiertävät Linnunradan keskusta ympyräradoilla, joilla on sama säde ja sama ratanopeus ja jotka sijaitsevat Linnunradan tasossa. Osoita, että tähden ominaisliike on riippumaton sen ja Auringon välisestä etäisyydestä. Laske tämän ominaisliikkeen suuruus.
- 17.6 Suunnassa $\ell = 145^\circ$ Linnunradan tasossa on havaittu kefeidin radiaalinopeudeksi 80 km s^{-1} . Mikä on tähden etäisyys? Kefeidin jakso on 3.16 vuorokautta ja sen näennäinen visuaalinen magnitudi on 12.3. Mikä on tähden näistä tiedoista laskettu etäisyys? Selitys??
- 17.7 Oletetaan, että Linnunradan massa ($M = 2 \times 10^{11} M_\odot$) on keskittynyt sen keskipisteeseen. Hetkellä $t = 0$ havaitsemme radiaalisen ”spiraalihaaran”. Laske ympyräradoilla liikkuvien tähtien paikat 50, 100, 150, 200 ja 250 miljoonan vuoden kuluttua. Piirrä tilanne kullakin hetkellä. Mitä voit sanoa spiraalihaaran säilymisestä?



- 17.8 a) Moniko oppikirjan lähimpien tähtien taulukon tähdistä on myös kirkkaimpien tähtien luettelossa? Mikä mahtaa olla syynä?
 b) Jos tähtitiheys olisi kaikkialla lähimpien tähtien luettelon mukainen, montako tähteä olisi pallossa, jonka säde on Canopusen etäisyys?
 c) Arvioi lähimpien tähtien massat massa-luminositeetti-relaation avulla. Jos tähtitiheys olisi sama koko Linnunradassa, mikä olisi Linnunradan massa?
- 17.9 Kuvitellaan, että Linnunrata on tasapaksu levy ja että Aurinko on tämän levyn keskitasossa. Olkoon kohteen absoluuttinen magnitudi M , galaktinen leveys b ja etäisyys keskitasosta z . Johda näennäisen magnitudin lauseke, kun ekstinktio Linnunradan kiekossa on $a \text{ mag kpc}^{-1}$. Jos Linnunradan paksuus on 200 pc, $M = 0$, $b = 30^\circ$, kohteen etäisyys $r = 1 \text{ kpc}$ ja $a = 1 \text{ mag kpc}^{-1}$, mikä on kohteen näennäinen magnitudi?

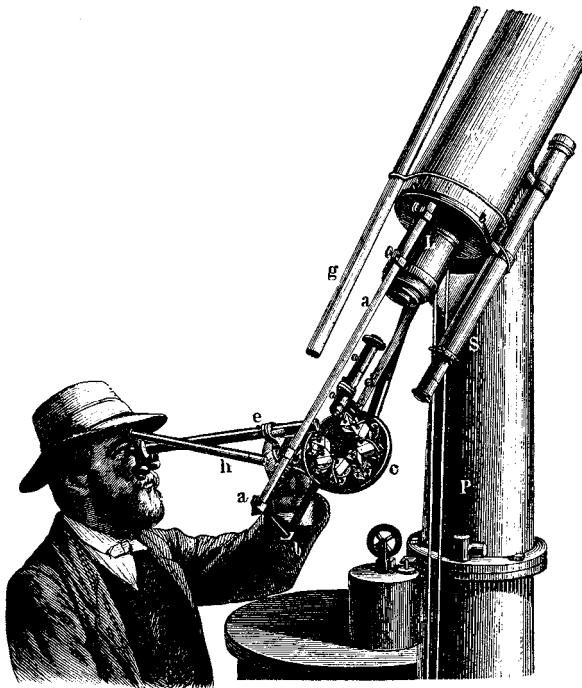
18 Galaksit

Joissakin seuraavista tehtävistä tarvitaan Hubble'n vakiota H . Tämän "vakion" arvoja muutellaan jatkuvasti, mutta se lienee $50 \leq H \leq 75 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$. Ratkaisut on laskettu käyttämällä arvoa $H = 75 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$. Viimeisimmät arviot ovat hieman pienempiä, mutta ihan silkkaa laiskuuttamme emme ole viitsineet muuttaa ratkaisuja.

- 18.1 Oletetaan, että galaksissa on $n(m) = Ne^{am} dm$ kappaletta tähtiä, joiden magnitudi on välillä $[m, m + dm)$, N ja a vakioita. Laske kaikkien magnitudia m_0 himmeämpien tähtien kokonaismagnitudi.
- 18.2 Oletetaan, että kaikki spiraaligalaksit ovat Linnunradan kokoisia. Kuinka kaukaa tällaiset kohteet näkyvät pintakohteina paljain silmin, 10 cm:n, 1 m:n ja 5 m:n kaukoputkilla?
- 18.3 a) Suuren Magellanin pilven etäisyys on 50 kpc. Kuinka suuren osan matkastaan oli nyt havaittava pilvestä lähtenyt valo taivaan taan, kun muuan merenkävijä Magalhães näki pilven etelän taivaalla vuonna 1521?
b) Mikä on vähintään sellaisten galaksien etäisyys ja radiaalinopeus, joiden nyt havaittava valo lähti matkaan ennen kuin elämä maapallolla siirtyi vedestä maalle siluurikaudella noin 400 miljoonaa vuotta sitten?
- 18.4 Andromedan galaksin ytimen absoluuttinen magnitudi on $M_V = -11.7$ ja massa $13 \times 10^6 M_\odot$.
a) Kuinka suurella teholla ydin säteilee, kun Auringon absoluuttinen magnitudi on $+4.71$ ja teho $3.8 \times 10^{26} \text{ W}$?
b) Oletetaan, että ydin muodostuu samanlaisista tähdistä, joiden massa-luminositeetti-relaatio on $\lg(L/L_\odot) = 3.5 \lg(M/M_\odot)$. Laske tähtien lukumäärä.
- 18.5 Kvasaarin PKS 1127-14 punasiirtymä on $z = 1.87$. Millä aallonpituudella ovat kvasaarin spektrissä visuaalialueelle osuvien viivojen lepoaallonpituudet? Mikä on vedyn H_α -viivan (656.2 nm) aallonpituus kvasaarin spektrissä?
- 18.6 Galaksi NGC 772 on luokiteltu Andromedan galaksin M31 kaltaiseksi Sb-spiraaliksi. Sen kulmaläpimita on $7'$ ja näennäinen magnitudi 12.0; M31:n vastaavat arvot ovat 3.0° ja 5.0.
a) Oletetaan galaksit samankokoisiksi. Laske niiden etäisyyksien suhde.
b) Oletetaan galaksit absoluuttisesti yhtä kirkkaiksi. Laske niiden etäisyyksien suhde.
c) Galaksin NGC 772 radiaalinopeus Linnunradan suhteen on 2562 km s^{-1} . Laske Hubble'n lain avulla galaksien etäisyyksien suhde, kun M31:n etäisyys on 690 kpc.

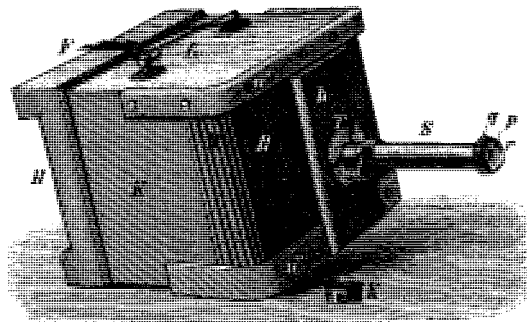


- 18.7 Galaksijoukon kymmenen kirkkaimman galaksin radiaalipeudet ovat 565, 760, 600, 690, 645, 715, 670, 590, 775 ja 575 kms^{-1} . Laske galaksien etäisyydet. Miksi tämän joukon galaksien etäisyyksien hajonta on suurempi kuin galaksijoukon tyypillinen läpimitta, noin 2 Mpc? Mikä on joukon todennäköinen etäisyys?
- 18.8 Pallomaisen galaksin tiheys etäisyydellä r keskipisteestä on
- $\rho(r) = \rho_0 a/r$, $a = \text{vakio}$,
 - $\rho(r) = \rho_0 a^2/(a^2 + r^2)$.
- Laske etäisyydellä r ympyräradalla liikkuvan tähden kulmanopeus $\omega(r)$.



19 Kosmologia

- 19.1 Galaksin NGC 3159 kulmaläpimitta on $1.3'$, näennäinen magnitudi 14.4 ja radiaalinopeus Linnunradan keskuksen suhteen 6940 km/s. Laske galaksin etäisyys, läpimitta ja absoluuttinen magnitudi. Mitkä tekijät voivat aiheuttaa virhettä tuloksiin?
- 19.2 Maailmankaikkeuden keskimääräinen tiheys nykyisen arvion mukaan on $\rho \approx 10^{-27} \text{ kg m}^{-3}$. Montako maapallon massaa kuutioparsekissa tämä vastaa? Kuinka monta vetyatomia kuutiometrissä tämä olisi?
- 19.3 a) Miksi galaksijoukkojen etäisyysindikaattorina käytetään niiden kirkkaimpia galakseja eikä joukon kaikkien galaksien kirkkauksien keskiarvoa?
b) Galaksijoukon A kolmanneksi kirkkaimman galaksin näennäinen magnitudi on 10 ja joukon B kolmanneksi kirkkaimman galaksin näennäinen magnitudi on 15 . Kumpi joukko on kauempana ja kuinka paljon?
- 19.4 Kuinka suuri pitäisi neutriinon massan olla, jotta neutriinot riittäisivät tekemään maailmankaikkeudesta suljetun? Neutriinotiheys on noin 600 cm^{-3} ja muun materian tiheydeksi voidaan olettaa kymmenesosa kriittisestä tiheydestä.
- 19.5 Galaksin NGC7603 spektriviivojen punasiirtymä vastaa radiaalinopeutta 8700 km s^{-1} . Sen kompaktin seuralaisgalaksin punasiirtymäksi on mitattu $16\,800 \text{ km s}^{-1}$. Laske kompaktin galaksin massa, mikäli ylimääräinen punasiirtymä johtuu pelkästään sen gravitaatiosta. Kompaktin galaksin näennäinen läpimitta on $10''$.



20 Sekalaisia tehtäviä

Elämä maailmankaikkeudessa

- 20.1 Valitse oppikirjan lähimpien tähtien taulukosta jokin auringontyyppinen tähti (spektriluokka F, G tai K), joka ei ole kaksoistähti. Oletetaan, että tähteä kiertää Jupiterin massainen planeetta 10 AU:n etäisyydellä. Laske tähden ja planeetan välinen kulmaetäisyys Maasta nähtynä ja planeetasta aiheutuva heilahtelu tähden paikassa. Laske myös planeetan näennäinen magnitudi suurimmassa elongaatiossa (jolloin planeetasta näkyy valaistuna puolet), jos sen Bondin albedo on sama kuin Jupiterilla ja heijastuneen säteilyn vuontiheys on suoraan verrannollinen valaistuna näkyvän pinnan projektioon näkösädeettä vastaan kohtisuoralla tasolla.
- 20.2 Jos avaruudessa on keskimäärin n tähteä kuutioparsekissa ja niistä osalla p (missä tietenkin $p \in [0,1]$) on sivilisaatioita, jotka ovat jo keksineet hiirenloukun ja kännykän, niin mikä on keskimääräinen matka kahden vierekkäisen sivilisaation välillä? Sovella tulosta Auringon ympäristöön. Tähtiätiheyden voit arvioida lähimpien tähtien taulukon avulla. Käytä p :lle arvoja 10^{-8} , 10^{-5} , 10^{-2} ja 1.

Historia

- 20.3 Aristarkhos laski Auringon ja Kuun etäisyyksien suhteen havaittuaan, että puolenkuun hetkellä Kuun ja Auringon välinen kulma on 87° . Paljonko hän sai tulokseksi? Todellisuudessa kulma on $89^\circ 51'$. Laske etäisyyksien suhde myös käyttämällä oikeaa arvoa. Laske Auringon ja Kuun säteet ja etäisyydet yksikkönä Maan säde, kun teemme edellisen lisäksi seuraavat havainnot:
- (1) Auringon kulmaläpimitta on $32'$.
 - (2) Kuun kulmaläpimitta on $31'$.
 - (3) Täydellinen kuunpimennys kestää 1 h 40 min, kun Kuu kulkee Maan varjon keskipisteen kautta.
 - (4) Synodinen kuukausi on 29.35 d.
- 20.4 *Keplerin monitahokkaat*: Asetetaan sisäkkäin kuusi palloa ja niiden väliin viisi säännöllistä monitahokasta siten, että kahden sisimmän pallon väliin pannaan oktaedri, seuraavaan väliin ikosaedri, sitten dodekaedri, tetraedri ja kuutio. Kukin monitahokas sivuaa sekä sisä- että ulkopuolista palloa. Nyt pallojen säteiden pitäisi vastata planeettojen keskietäisyyksiä Auringosta (Merkuriuksesta Saturnukseen). Kuinka hyvin tämä pitää paikkansa? (Sivumennen sanoen, kaikki pallojen säteet ja monitahokkaiden särmät voidaan lausua muodossa $\sqrt{a + b\sqrt{5}}$, missä a ja b ovat rationaalilukuja, jos yksikin niistä on tätä muotoa. Näin käy, jos



yksiköksi valitaan esimerkiksi Maan radan säde, jolle siis $a = 1$, $b = 0$.)

Monitahokkaiden sisään- ja ympäripiirrettyjen pallojen säteiden laskeminen on varsin suttaista puuhaa. Jos aiot itse laskea säteet, pääset helpommalla, jos todistat ensin seuraavan yleisen tuloksen:

Lause: Jos säännöllisen n -tahokkaan tahkot ovat k -kulmioita, joiden sivun pituus on a , monitahokkaan sisään- ja ympäripiirrettyjen pallojen säteet ovat

$$r = \frac{a}{2 \sin(\pi/k)} f(n,k),$$

$$R = \frac{a}{2 \sin(\pi/k)} \sqrt{1 + f^2(n,k)},$$

missä

$$f(n,k) = \frac{\cos u \cos(\pi/k)}{\sqrt{\sin^2 u - \cos^2(\pi/k)}}, \quad u = \frac{\pi}{2} \left(\frac{4 + n(k-2)}{nk} \right).$$

(Tälle lienee sievempiäkin muotoja alan oppikirjoissa. Tehtävän laatijalla vain ei aikoinaan ollut aikaa penkoa matematiikan laitoksen kirjastoa eikä myöskään intoa johtaa tarvittavia arvoja perinteisen Eukleideen geometrian menetelmillä, minkä seurauksena syntyi tällainen kummallinen aputulos.)

- 20.5 Kalevalan XXIII runo sisältää neuvoja nuorelle vaimolle siitä, miten hänen on appelassa oltava ja ahkeroitava. Kun kukko kerran kiekaisi, silloin oli noustava töihin. Mutta:

*Kun ei kukko laulakana, ei äännä isännän lintu,
piä kuuta kukkonasi, otavaista oppinasi,
käyös ulkona usein, käyös kuuta katsomassa,
otavaista oppimassa, tähtiä tähyämässä!
Konsa oike'in Otava, sarvet suorahan suvehen,
pursto perin pohjaisehen, silloin aikasi sinulla
nousta luota nuoren sulhon, saa'a viereltä verevän,
saa'a tulta tuhkasista, valkeata vakkasesta,
tuli puikkohon puhua lienosti levittämättä.*

Mihin vuodenaikaan tällainen neuvo sopisi?

(Tätä tehtävää meille ehdotti edesmennyt tähtitieteen professori Jaakko Tuominen, jonka persoonallisuus vaikutti osaltaan siihen, että yhdestä tämän tekeleen tekijöistä tuli lähes ammattimainen tähtitieteilijä.)

- 20.6 Pyramidien rakentamisen aikoihin Sirius nousi heliakkisesti Niilin tulvien alkaessa, suunnilleen kesäpäivänseisauksen aikaan. Arvioi tämän perusteella pyramidien rakennusaika vuosituhannen tarkkuudella.
- 20.7 *Odyssiasta* löydämme seuraavat rivit (Saarikosken käännös):
*Istuen peräsिमessä hän ohjasi tottuneesti eikä uni painanut
silmäluomia umpeen, kun hän seurasi katseellaan Plejadeja
ja myöhään laskevaa Häränajajaa, ja Otavaa jota sanotaan*

myös Vaunuiksi ja joka pyörii yhdessä paikassa ja katsoo Orioniin eikä joudu koskaan käymään valtameressä.

Mitä tämän perusteella voi sanoa Odysseian ajankohdasta?

Sekalaista viihdettä

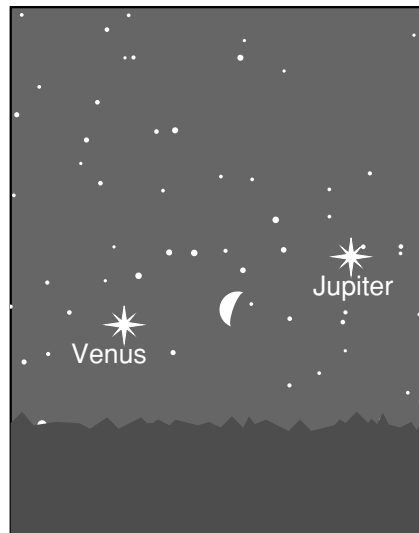
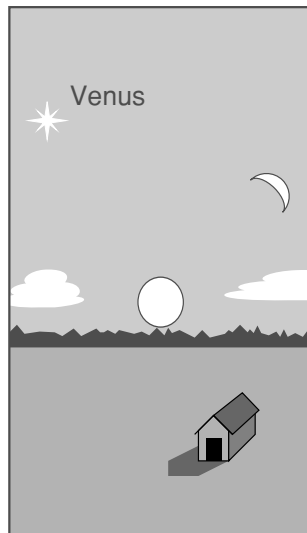
Nytpä lienetkin jo perin juurin kyllästynyt kaikenlaiseen laskemiseen. Tässä sitten lopuksi muutamia rentouttavia ajanvietetehtäviä, jotka eivät kovin paljoa matematiikkaa vaadi. Joihinkin tehtäviin voi olla haudattuna koiria tai muita pieniä metsän eläviä.

- 20.8 Seuraava kaukoputken mainos on peräisin eräästä amerikkalaisesta lehdestä. Onko siinä muutakin epäilyttävää kuin sovinistisehko sävy?

And if you're into heavenly bodies of another sort, the bulbous Astroscan 2001 telescope is an "Open sesame!" to the magical majesty of the night sky. Say honey, it's 11:20. Whaddaya say we go back to my place and watch Venus rising?

- 20.9 Olet saanut joululahjaksi 100 metriä pitkän matemaattisen heilurin, mielettömän tarkan digitaalikellon ja (analogisen) astelevyn. Keksi ainakin kaksi keinoa, miten näiden välineiden avulla saa selville leveysasteen.

- 20.10 Mitä virheitä löydät allaolevista kuvista?

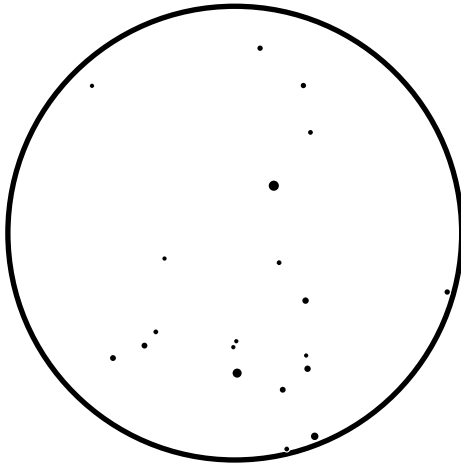
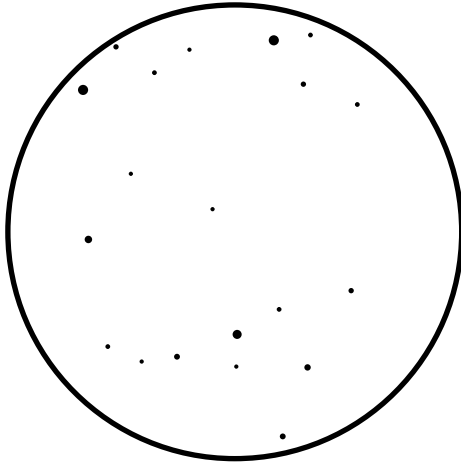


- 20.11 Tuotimme aikoinaan edellisen tehtävän piirrookset autuaan tietämättöminä siitä, että joku oli jo ehtinyt edellemme. Mitä mieltä olet seuraavasta kuvasta? (Nicolaus Rohlfs: Betrachtung der beyden grossen Himmels-lichter Sonn und Mond, Hampuri 1736)

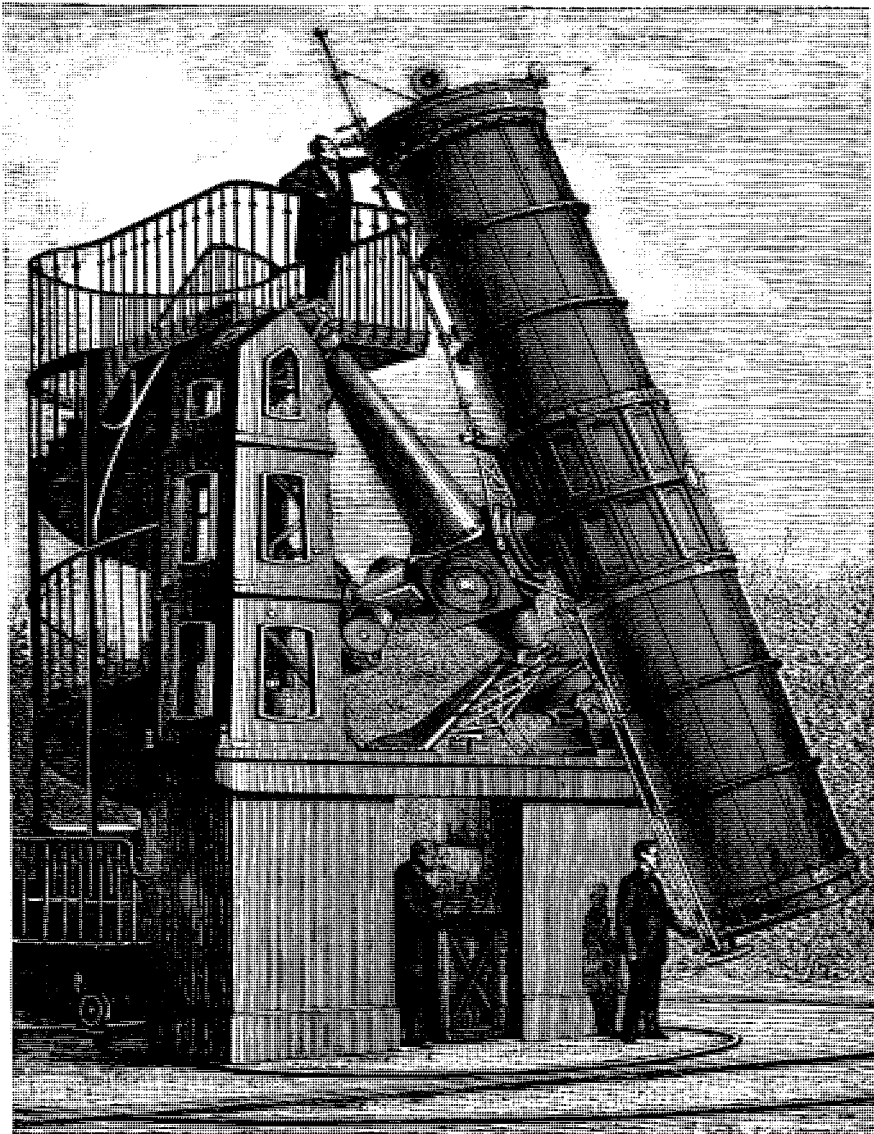


- 20.12 Kumpi vaikuttaa vetovoimallaan voimakkaammin ihmiskohtaloon, Mars oppositiossa vai puolen metrin päässä seisova 100-kieloinen juntti?
- 20.13 Näkyykö taivaankappale illalla vai aamulla seuraavissa tapauksissa? Oletetaan havaittavan olevan suunnilleen Suomessa.
- Venus itäisessä elongaatiossa.
 - Venus yläkonjunktin jälkeen.
 - Merkurius alakonjunktin jälkeen.
 - Mars konjunktin jälkeen.
 - Uusikuu.
 - Kuu viimeisen neljänneksen aikana sattuvan kuunpimennyksen hetkellä.
 - Mars alakonjunktiossa.
 - Sirius maaliskuussa.
 - Jupiter opposition jälkeen.

- j) Kuu ensimmäisen neljänneksen aikana.
 - k) Kuu helluntaina.
 - l) Kuu jouluaattona.
 - m) Venus oppositiossa.
 - n) Kuu toisena pääsiäispäivänä.
 - o) Kuu yläkonjunktiossa.
 - p) Pohjantähti kevätpäiväntasauksen aikana.
 - q) Aurinko oppositiossa.
 - r) Sirius heliakkisessa nousussa.
 - s) Mars ennen oppositiota.
 - t) Jupiter kesäpäiväntasauksen aikana.
 - u) Kuu kevätpäiväntasauksen aikana.
 - v) Sirius syyspäiväntasauksen aikana.
 - w) Kuu laskiaistiistaina.
 - x) Kuu helatorstaina.
 - y) Kuu perigeumissa.
 - z) Kuu kynttilänpäivänä.
 - ä) Alnair tammikuussa.
 - ö) Malediivien yläpuolella oleva geostationaarinen satelliitti.
- 20.14 Missä seuraavat ilmiöt ovat nähtävissä?
- a) Keskipäivällä tapahtuva kuunpimennys.
 - b) Keskiyöllä tapahtuva auringonpimennys.
- 20.15 Jules Vernen romaanissa *Matka Maasta Kuuhun* matkataan Kuuhun ammuksessa, joka laukaistaan valtavalla tykillä. Matkustajat kävelevät aluksi ammuksen Maan puoleisella lattialla, mutta kevenevät koko ajan, kunnes leijailevat painottomina ohittaessaan pisteen, jossa Maan ja Kuun vetovoimat ovat yhtä suuret. Mukana ollut koira oli kuollut lähdössä ja sen raato oli työnnetty ulos ammuksesta. Se kuitenkin jatkoi matkaansa leijuen koko ajan aluksen vierellä. Mitä vikaa tarinassa on?
- 20.16 Seuraava ote on Hemingwayn teoksesta *Old Man and the Sea* (*Vänhus ja meri*). Miten oli Hemingwayn tähtitieteen laita?
- It was dark now as it becomes dark quickly after the sun sets in September. He lay against the worn wood of the bow and rested all that he could. The first stars were out. He did not know the name of Rigel but he saw it and knew soon they would all be out and he would have all his distant friends.*
- 20.17 Keskimääräinen turistimme oli taas kerran lähtenyt harharetkilleen ja pudonnut johonkin kaivontapaiseen. Toivuttuaan hän näki tähtiä, joista hän myöhemmin laati piirroksen päästyään pois kaivosta. Vertailu tähtikarttaan ei johtanut mihinkään, sillä tähdet eivät olleet todellisia, vaan johtuivat putoamisen aiheuttamasta kolhusta. Jääräpäisenä suomalaisena turisti laskeutui seuraavana yönä kaivon ja laati uuden piirroksen. (Kuvat seuraavalla sivulla.) Kaivon leveydeksi hän mittasi 1.2 metriä. Mikä on kaivon leveysaste ja kuinka syvä se on? (Valitettavasti kuvat menivät myöhemmin sekaisin, joten emme tiedä, kumpi esittää oikeaa tähtitaivasta.)



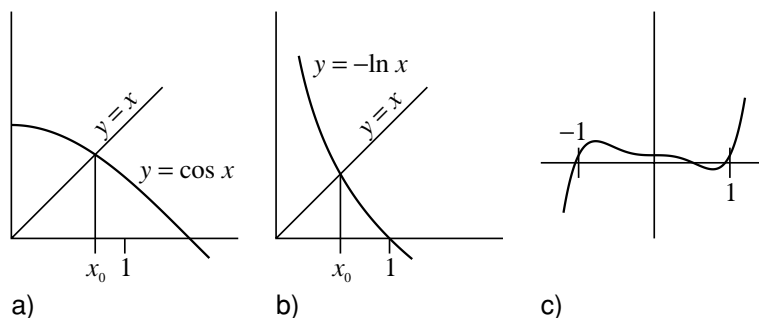
Ratkaisut





1 Johdanto

- 1.1 Yhtälöt ovat kaikki helposti kirjoitettavissa muotoon $x = f(x)$, joten ne voidaan ratkaista iteroimalla arvaamalla ensin jokin alkuarvo x_0 ja laskemalla sen jälkeen parannettuja arvioita $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1)$ jne. Kun x :n arvot pysyvät samoina halutulla tarkkuudella, ratkaisu on löytynyt. Jos arvot näyttävät hajaantuvan, kirjoitetaan yhtälö muotoon $x = f^{-1}(x)$ ja yritetään uudestaan. (Oletetaan, että f on niin siisti, että sillä on käänteiskuvaus f^{-1} ainakin jossakin ratkaisun ympäristössä. Soveltamalla f^{-1} :tä yhtälön $x = f(x)$ kumpaankin puoleen saadaan $f^{-1}(x) = f^{-1}(f(x)) = x$, joten yhtälöllä $x = f^{-1}(x)$ on sama ratkaisu kuin alkuperäiselläkin.)



- a) Arvioidaan alkuarvo graafisesti $\Rightarrow x_0 = 0.7$ (tämä on tietenkin radiaaneja, muuten tulee puppua!)

$$\begin{aligned}x_1 &= \cos x_0 = 0.7648, \\x_2 &= \cos x_1 = 0.7215, \\&\dots \\x_{15} &= \cos x_{14} = 0.7392.\end{aligned}$$

Jatkossa x :n arvot eivät enää muutu kolmen desimaalin tarkkuudella, joten $x = 0.739$ on ratkaisu.

- b) Kirjoitetaan yhtälö muotoon $x = -\ln x$:

$$\begin{aligned}x_0 &= 0.5, \\x_1 &= -\ln x_0 = 0.6931, \\x_2 &= 0.3665, \quad x_3 = 1.0037, \quad x_4 = -0.0037.\end{aligned}$$

Tämä ei näköjään suppene, joten muutetaan yhtälö muotoon



$x = e^{-x}$ ja aloitetaan alusta:

$$x_0 = 0.5,$$

$$x_1 = e^{-x_0} = 0.6065,$$

...

$$x_{12} = 0.5671.$$

Tästä tämä ei enää juuri parane, joten ratkaisu on $x = 0.567$.

c) Viidennen asteen yhtälöllä on tunnetusti viisi ratkaisua, joista osa mahdollisesti kompleksisia. Yritämme kuitenkin löytää vain reaaliset juuret. Piirtämällä funktion $f(x) = x^5 - x^3 + 0.1$ kuvaaja nähdään, että yhtälöllä lienee noin kolme reaalista ratkaisua. Iterointi on nyt suoritettava erikseen kullekin ratkaisulle valitsemalla lähtöarvo riittävän läheltä f :n nollakohtaa. Sopivia alkuarvoja ovat esim. -1 , 0.5 ja $+1$. Iterointia varten yhtälö kirjoitetaan muotoon $x = \sqrt[3]{x^3 - 0.1}$ tai $x = \sqrt[3]{x^3 + 0.1}$. Kokeilemalla löydetään se muoto, joka saa iteroinnin suppenemaan. Ratkaisut ovat -1.043 , 0.514 ja 0.937 .

- 1.2 a) Väite osoitetaan helposti induktiolla. Osoitetaan aluksi, että väite pätee kun $n = 1$:

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} t^{1-1} e^{-t} dt = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = 1 = 0!$$

Oletetaan sitten, että väite pätee jollakin n :n arvolla, ja osoitetaan, että sen täytyy tällöin päteä myös yhtä suuremmalla n :n arvolla:

$$\begin{aligned} \Gamma(n+1) &= \int_0^{\infty} t^n e^{-t} dt \\ &= \left[t^n (-e^{-t}) - n \int_0^{\infty} t^{n-1} (-e^{-t}) dt \right] \\ &= n \int_0^{\infty} t^{n-1} e^{-t} dt = n\Gamma(n). \end{aligned}$$

Nyt käytämme hyväksi oletusta $\Gamma(n) = (n-1)!$, jolloin saamme

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)! = n!$$

Tästäpä sitten seuraakin, että väite pätee kaikilla n :n positiivisilla kokonaislukuarvoilla.

- b) Sijoitetaan $\Gamma(z)$:n määritelmässä esiintyvään integraaliin $t = ks$, $dt = k ds$, jolloin

$$\begin{aligned} \Gamma(z) &= \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt = \int_0^{\infty} (ks)^{z-1} e^{-ks} k ds \\ &= k^z \int_0^{\infty} s^{z-1} e^{-ks} ds. \end{aligned}$$

- 1.3 Tarkastellaan funktiota $f(x) = (1+x)^t$. Kun $x \ll 1$, funktiota voidaan approksimoida Taylorin sarjansa kahdella ensimmäisellä

termillä:

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x = 1 + tx.$$

Koska $v/c \ll 1$, on

$$\begin{aligned} \frac{\nu}{\nu_0} &= \left(1 - \frac{v}{c}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{v}{c}\right)^{-\frac{1}{2}} \approx \left(1 - \frac{v}{2c}\right) \left(1 - \frac{v}{2c}\right) \\ &= 1 - \frac{v}{c} + \frac{v^2}{4c^2} \approx 1 - \frac{v}{c}. \end{aligned}$$

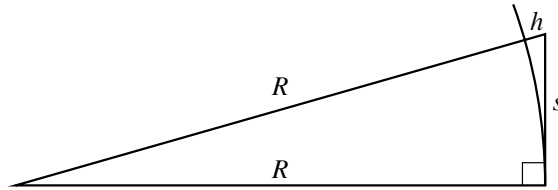
Jos merkitään $\nu = \nu_0 + \Delta\nu$, on

$$\frac{\Delta\nu}{\nu_0} = \frac{-v}{c}.$$

Tämä voidaan lausua aallonpituuksien avulla seuraavasti: Koska $\lambda = c/\nu$, on $d\lambda/d\nu = -c/\nu^2$. Kun $\Delta\nu/\nu$ on pieni, on $d\lambda/d\nu \approx \Delta\lambda/\Delta\nu \Rightarrow$

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = -\frac{c\Delta\nu}{\nu^2\lambda} = -\frac{\Delta\nu}{\nu} \Rightarrow \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{v}{c}.$$

1.4



Pythagoraan lauseesta saadaan

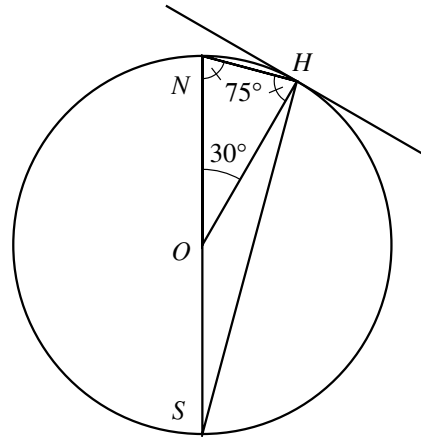
$$(R + h)^2 = R^2 + s^2 \Rightarrow 2hR + h^2 = s^2.$$

Koska $h \ll R$, on $2hR + h^2 \approx 2hR$, joten

$$h = \frac{s^2}{2R} = \frac{25^2}{2 \times 6370} \text{ km} = 0.049 \text{ km} = 49 \text{ m}.$$

Samasta yhtälöstä saadaan myös horisontin etäisyys s katsottaessa korkeudelta h : $s = \sqrt{2Rh} \approx 3.57\sqrt{h}$ km, kun korkeus h on lausuttu metreinä.

1.5 Kuvan kolmio ONH on tasakylkinen, joten kulmat N ja H ovat yhtä suuria. Koska kulma O on 30° , ovat N ja H kumpikin 75° . Pohjoisnavan suunta on siis 15° alaspäin pohjoishorisontista. Ympyrän halkaisija näkyy kehältä katsottaessa suorassa kulmassa, joten $\angle NHS = 90^\circ$. Siispä etelänavan suunta on 75° alaspäin etelähorisontista.



1.6 Tähtien kulmaläpimitta on

$$\begin{aligned}\alpha_* &= \frac{2 \times 700\,000 \text{ km}}{4 \times (365.24 \times 24 \times 3600 \text{ s}) \times 3 \times 10^5 \text{ km s}^{-1}} \\ &= 3.7 \times 10^{-8} \text{ rad} = 0.0076''.\end{aligned}$$

Lampun läpimitta on

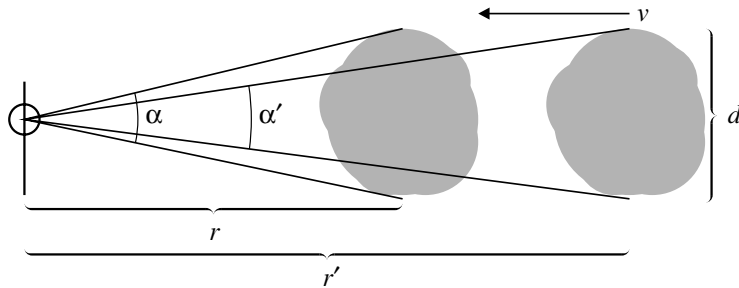
$$\alpha_{\otimes} = \frac{0.05 \text{ m}}{85\,000 \text{ m}} = 5.9 \times 10^{-7} \text{ rad} = 0.12'' = 16\alpha_*.$$

Lamppu näkyy siis noin 16 kertaa niin isona kuin tähti.

1.7 Kulmien arviointi ilman apuvälineitä on yllättävän vaikeaa, joten on hyödyllistä opetella ainakin jokin tällainen yksinkertainen keino kulmien mittaamiseksi. Käden koko vaihtelee, joten jokaisen on syytä suorittaa itse tarvittavat mittaukset. Tämän ratkaisun kirjoittaja ripusti mittanauhan seinälle ja asettui seisomaan 3 metrin päähän seinästä. Tällöin etusormi peitti mittanauhasta 10 cm ja vaaksa 66 cm. Tästä saadaankin kulmat

$$\begin{aligned}\alpha_{\text{etusormi}} &= 10 \text{ cm} / 300 \text{ cm} = 0.033 \text{ rad} \approx 2^\circ, \\ \alpha_{\text{vaaksa}} &= 66 \text{ cm} / 300 \text{ cm} = 0.220 \text{ rad} \approx 13^\circ.\end{aligned}$$

1.8



Kuvan merkinnöillä on $\alpha \approx d/r$, $\alpha' \approx d/r'$, joten

$$\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{d/r}{d/r'} = \frac{r'}{r} = \frac{(t + \Delta t)v}{tv} = \frac{t + \Delta t}{t},$$

missä t on jälkimmäisestä havainnosta saapumiseen kuluva aika ja Δt havaintojen aikaväli. Ratkaistaan tästä t :

$$t = \frac{\Delta t \alpha'}{\alpha - \alpha'} = \frac{\Delta t \alpha'}{1.05 \alpha' - \alpha'} = 20 \Delta t.$$

Koska havaintojen väliaika Δt oli yksi kuukausi, armonaikaa oli vielä 20 kuukautta jälkimmäisestä havainnosta.

1.9 a) r -säteisen pallon pinnalla oleva pinta-ala A näkyy keskipisteestä avaruuskulmassa $\omega = A/r^2$. Koska pallon ala on $4\pi r^2$, on täysi avaruuskulma $4\pi r^2/r^2 = 4\pi$ steradiaania.

b) Kuun säde on $R = 1738 \text{ km}$. Etäisyys vaihtelee (ja samoin näennäinen koko), mutta keskimäärin se on $r = 384\,400 \text{ km}$. Avaruuskulma, jossa Kuu näkyy on

$$\omega = \pi R^2 / r^2 = 6.42 \times 10^{-5} \text{ sterad.}$$

(Kun kulmaläpimitta sen sijaan on ihan eri asia: $\alpha = 2R/r = 0.009 \text{ rad} = 0.52^\circ = 31'$.)

- 1.10 Kun $[m] = M_\odot$ (Auringon massa), $[l] = \text{AU}$ ja $[t] = a$ (sideerinen vuosi), on $G = 4\pi^2$. Jos ajan yksiköksi vaihdetaan vuorokausi, saadaan $G = 0.00029\,59122 \text{ AU}^3 M_\odot^{-1} \text{ d}^{-2}$.

$1 \text{ AU} = 1.496 \times 10^{11} \text{ m}$, $M_\odot = 1.989 \times 10^{30} \text{ kg}$ (tämä on epävarma arvio, jonka vuoksi lopputulos ei voi olla kovin tarkka), $1 \text{ d} = 86\,400 \text{ s}$, joten

$$G = 0.00029\,59122 \frac{(1.496 \times 10^{11} \text{ m})^3}{1.989 \times 10^{30} \text{ kg} \times (86\,400 \text{ s})^2} \\ = 6.673 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}.$$

b) $M_\odot = 328\,900 M_\oplus$, $1 \text{ d} = 1440 \text{ min} \Rightarrow G = 1.453 \times 10^9 \text{ km}^3 M_\oplus^{-1} \text{ min}^{-2}$.

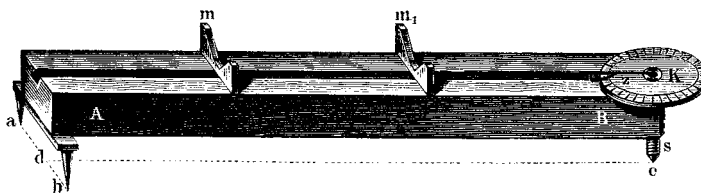
- 1.11 Tämä tehtävä saattaa tuntua lievästi sanottuna älyttömältä. Yhtä älyttömältä tuntuisi kuitenkin, jos etäisyyksiä mitattaisiin pohjois-etelä-suunnassa metreinä ja itä-länsi-suunnassa arsinoina (arsina on vanha venäläinen pituusmitta, noin 71 cm). Suhteellisuusteorian mukaan ajan ja avaruuden asema on hyvin samankaltainen, ja monet asiat näyttävät siistimmiltä, jos aikoja ja etäisyyksiä mitataan samoilla yksiköillä. Voimme määrittellä, että yksi metri on se aika, jossa valo kulkee yhden metrin. Tällöin siis valon nopeus on $c = 1$. Koska gravitaatiovakio tuppautuu myös vähän joka paikkaan, se asetetaan usein myös ykköseksi, jotta päästäisiin vähemmällä kirjoittamisella. Asetamme siis $c = 1$, $G = 1$, jolloin

$$\frac{G}{c^2} = 7.421 \times 10^{-28} \text{ m kg}^{-1} = 1 \Rightarrow 1 \text{ kg} = 7.421 \times 10^{-28} \text{ m}.$$

Auringon massa on $1.989 \times 10^{30} \text{ kg} = 1480 \text{ m}$. (Myöhemmin nähdään, että Schwarzschildin säde on $R_S = 2GM/c^2$. Kun massa lausutaan metreinä, on $R_S = 2M$; Auringolle $R_S = 2960 \text{ m}$.)

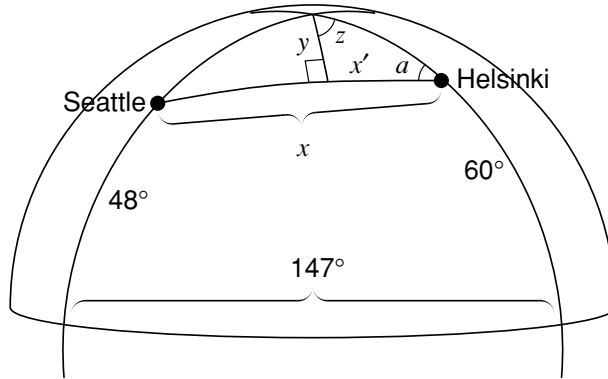
$$\frac{G}{c^3} = 2.475 \times 10^{-36} \text{ s kg}^{-1} = 1 \Rightarrow 1 \text{ kg} = 2.475 \times 10^{-36} \text{ s}.$$

Auringon massa sekunteina on $4.92 \times 10^{-6} \text{ s}$.



2 Pallotähtitiedettä

2.1



Etäisyys saadaan kosinikaavasta:

$$\begin{aligned}\cos x &= \cos 42^\circ \cos 30^\circ + \sin 42^\circ \sin 30^\circ \cos 147^\circ = 0.363 \\ \Rightarrow x &= 68.72^\circ = 1.199 \text{ rad}\end{aligned}$$

Matka Helsingistä Seattleen on siis $xR = 1.199 \times 6370 \text{ km} \approx 7640 \text{ km}$.

Soveltamalla sinilauseetta kuvan pallokolmioon saadaan:

$$\begin{aligned}\frac{\sin a}{\sin 42^\circ} &= \frac{\sin 147^\circ}{\sin x} \Rightarrow \sin a = 0.391 \Rightarrow a = 23.03^\circ, \\ \frac{\sin a}{\sin y} &= \frac{\sin 90^\circ}{\sin 30^\circ} \Rightarrow \sin y = 0.196 \\ \Rightarrow y &= 11.28^\circ = 0.197 \text{ rad}.\end{aligned}$$

Lentoreitin pohjoisin leveysaste on $90^\circ - y \approx 79^\circ$ ja etäisyys navalle $yR \approx 1250 \text{ km}$.

Kosinikaavasta saadaan

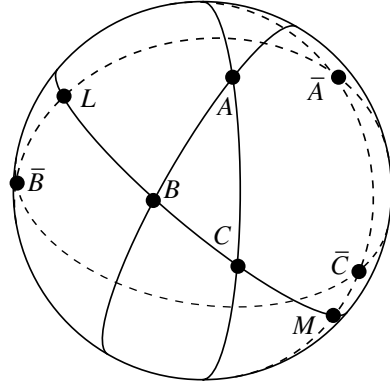
$$\begin{aligned}\cos 30^\circ &= \cos y \cos x' + \sin y \sin x' \cos 90^\circ = \cos y \cos x' \\ \Rightarrow \cos x' &= 0.883 \Rightarrow x' = 27.98^\circ.\end{aligned}$$

Kulma z voidaan nyt ratkaista sinikaavasta:

$$\frac{\sin z}{\sin x'} = \frac{\sin 90^\circ}{\sin 30^\circ} \Rightarrow \sin z = 0.938 \Rightarrow z = 69.79^\circ.$$

Pohjoisimman pisteen pituusaste on siis noin 70° länteen Helsingistä. Paikka on niin ollen $(79^\circ\text{N}, 45^\circ\text{W})$ eli Pohjois-Grönlannissa. Reitin lähtösuunta Helsingistä on 23° pohjoissuunnasta länteen eli likimain Tamperetta kohti.

2.2 Pallokolmion ABC sivu BC on isoympyrän kaari. Merkitään \bar{A} :lla tämän isoympyrän napaa sillä pallonpuoliskolla, jolla kolmio sijaitsee. Vastaavasti muihin sivuihin liittyviä napoja merkitään \bar{B} :lla ja \bar{C} :lla. Jatketaan sivua BC , kunnes se leikkaa sivut $\bar{A}\bar{B}$ ja $\bar{A}\bar{C}$ pisteissä L ja M . Koska \bar{A} on isoympyrän kaarta $LBCM$ vastaava napa, kulma \bar{A} on yhtä suuri kuin kaarta LM vastaava keskuskulma. Lisäksi \bar{A} :n ja kaikkien sivun BC pisteiden välinen kulma on 90° . Samoin \bar{B} :n ja AC :n pisteiden välinen kulma on 90° . Niinpä pisteen C etäisyys sekä \bar{A} :sta että \bar{B} :sta on 90° , joten C on isoympyrää $\bar{A}\bar{B}$ vastaava napa.



Samalla tavoin voidaan osoittaa, että muutkin ABC :n kärjet ovat $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$:n sivuja vastaavia napoja.

Koska L on isoympyrällä $\bar{A}\bar{B}$, on $CL = 90^\circ$. Samalla tavoin nähdään, että $BM = 90^\circ$. Nyt

$$\begin{aligned}\bar{A} &= LM = LB + BM = LB + 90^\circ = (LC - BC) + 90^\circ \\ &= (90^\circ - a) + 90^\circ,\end{aligned}$$

joten $\bar{A} = 180^\circ - a$. Samaan tapaan saadaan $\bar{B} = 180^\circ - b$, $\bar{C} = 180^\circ - c$, $\bar{a} = 180^\circ - A$ jne.

Sovelletaan nyt kosinikaavaa pallokolmioon $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$:

$$\cos \bar{a} = \cos \bar{b} \cos \bar{c} + \sin \bar{b} \sin \bar{c} \cos \bar{A}.$$

Sijoittamalla tähän edellä saadut viivallisten suureiden lausekkeet saadaan haluttu yhtälö. Samaa menetelmää voidaan tietenkin soveltaa mihin tahansa pallokolmion sivuja ja kulmia koskevaan yhtälöön.

2.3 a) Seuraa suoraan kosinikaavasta, kun $\cos C = 0$:

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C = \cos a \cos b.$$

b)

$$\begin{aligned}\tan b \tan(90^\circ - B) &= \tan b \cot B = \\ \frac{\sin b \cos B}{\cos b \sin B} &= \frac{\sin b \cos B}{\sin B \cos b} = \frac{\sin a \cos B}{\sin A \cos b}.\end{aligned}$$

Viimeinen yhtälö saadaan soveltamalla pallokolmion sinikaavaa tulon ensimmäiseen tekijään. Edellisessä tehtävässä johdetun kaa-

van perusteella on

$$\cos B = -\cos A \cos C + \sin A \sin C \cos b = \sin A \cos b.$$

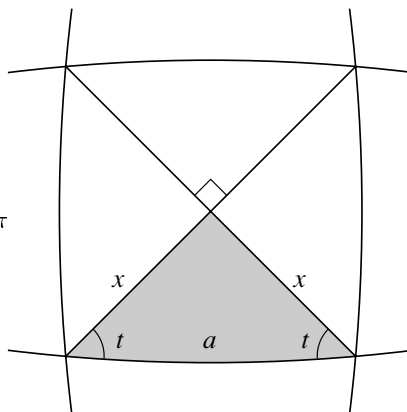
Sijoittamalla tämä edellä olevaan lausekkeeseen saadaan todistettavan yhtälön ensimmäinen osa. Jälkimmäinen yhtälö seuraa sinikaavasta:

$$\begin{aligned} \frac{\sin a}{\sin A} &= \frac{\sin c}{\sin C} \\ \Rightarrow \sin a &= \sin A \sin c = \cos(90^\circ - A) \cos(90^\circ - c). \end{aligned}$$

2.4

Yhden kolmion palloeksessä on

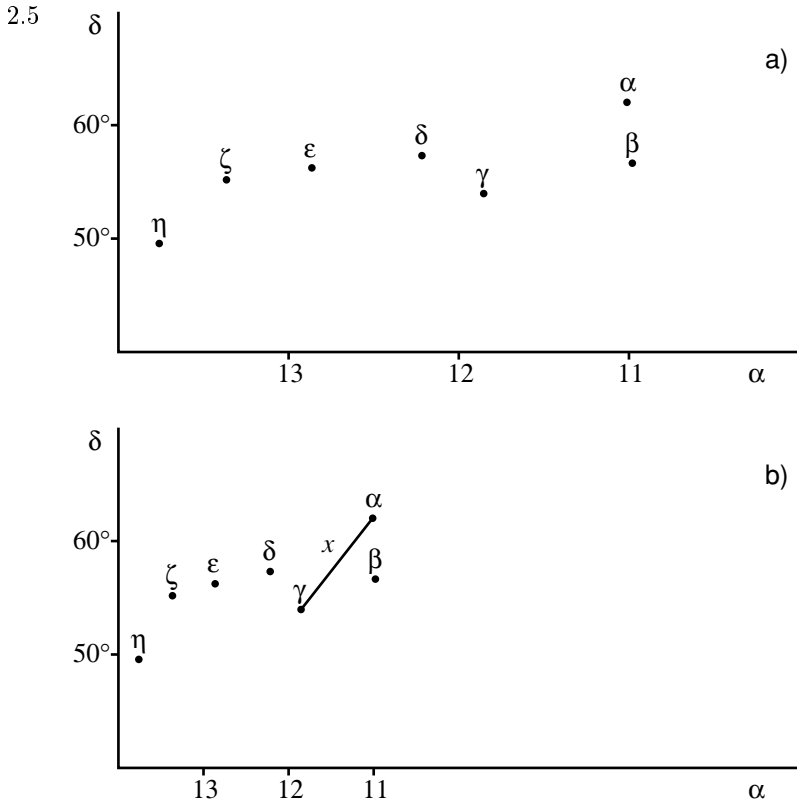
$$\begin{aligned} E &= 2t + \frac{1}{2}\pi - \pi = 2t - \frac{1}{2}\pi \\ \Rightarrow \\ \sin E &= \sin\left(2t - \frac{1}{2}\pi\right) \\ &= -\cos 2t = 2\sin^2 t - 1. \end{aligned}$$



Suorakulmaisessa ja tasakylkisessä pallokolmiossa on

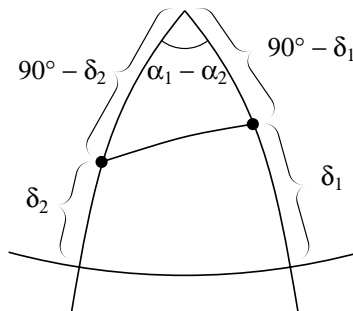
$$\begin{aligned} \sin t &= \frac{\sin x}{\sin a}, \\ \cos a &= \cos x \cos x = \cos^2 x. \\ \Rightarrow \sin^2 t &= \frac{\sin^2 x}{\sin^2 a} = \frac{1 - \cos^2 x}{\sin^2 a} = \frac{1 - \cos a}{\sin^2 a} \\ \Rightarrow \sin E &= 2\sin^2 t - 1 = 2\frac{1 - \cos a}{\sin^2 a} - 1 \\ &= 2\frac{2\sin^2 \frac{1}{2}a}{(2\sin \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}a)^2} - 1 = \frac{1}{\cos^2 \frac{1}{2}a} - 1 \\ &= \frac{1 - \cos^2 \frac{1}{2}a}{\cos^2 \frac{1}{2}a} \\ \Rightarrow \sin E &= \tan^2 \frac{1}{2}a. \end{aligned}$$

Neliön pinta-ala on siis $A = 4E = 4 \arcsin(\tan^2 \frac{1}{2}a)$. Esimerkiksi jos $a = 1$ rad, on $A \approx 1.2123$ sterad; jos $a = \pi/2$, on $A = 2\pi$ (kysymyksessä on tällöin puolipallo). Yksi neliöaste on steradiaaneina $4 \arcsin(\tan^2 0.5^\circ) = 0.000305$, joten pallon pinnalle (ala 4π steradiaania) mahtuu näin määriteltyjä neliöasteita 41251 kappaletta.



Tuntiympyrät lähenevät toisiaan lähestyttäessä napoja. Kun deklinaatio on δ , rektaskensioerotusta $\Delta\alpha$ vastaa kulmaetäisyys $\Delta\alpha \cos \delta$. Otavan deklinaatio on noin 60° , joten $\cos \delta \approx \frac{1}{2}$. Tämän vuoksi b)-kohdan kuva on likimain oikean muotoinen.

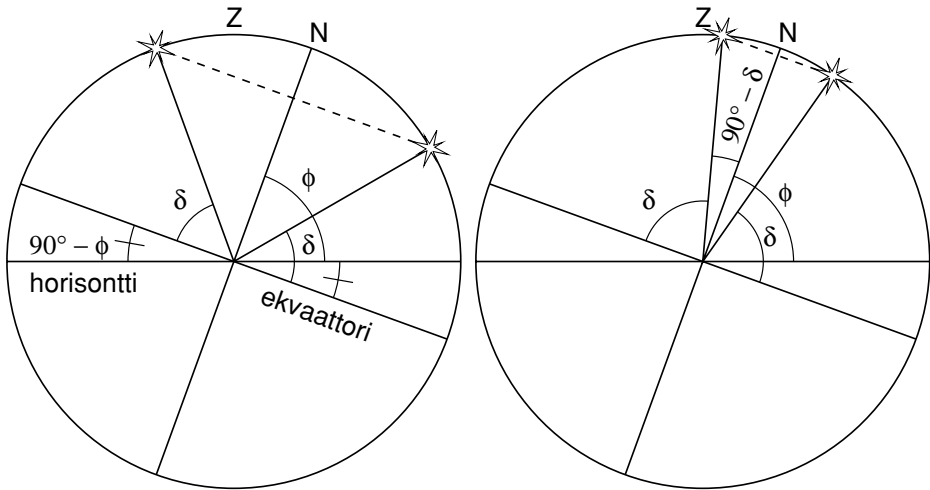
c) Alkuperäisen piirroksen mittakaava oli $1^\circ \cong 2 \text{ mm}$. Välimatka x on 21 mm, joten kulmaetäisyys on 10.5° . Etäisyyttä ei voi mitata kuvasta a), koska sen akseleiden mittakaavat ovat erilaiset.



Tarkka arvo saadaan kosinikaavasta:

$$\begin{aligned}
 \cos x &= \cos(90^\circ - \delta_1) \cos(90^\circ - \delta_2) \\
 &\quad + \sin(90^\circ - \delta_1) \sin(90^\circ - \delta_2) \cos(\alpha_1 - \alpha_2) \\
 &= \sin \delta_1 \sin \delta_2 + \cos \delta_1 \cos \delta_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2) \\
 &= \sin 62.02^\circ \sin 53.97^\circ \\
 &\quad + \cos 62.02^\circ \cos 53.97^\circ \cos 12.625^\circ \\
 &= 0.9835 \\
 \Rightarrow x &= 10.4^\circ
 \end{aligned}$$

2.6



Saadaan kaksi eri ratkaisua riippuen siitä, kulminoiko tähti zeniitin etelä- vai pohjoispuolella. Jos yläkulminaatio tapahtuu zeniitin eteläpuolella, on

$$\begin{cases} a_{\max} &= 90^\circ - \phi + \delta, \\ a_{\min} &= \delta - (90^\circ - \phi) = -90^\circ + \phi + \delta. \end{cases}$$

\Rightarrow

$$\delta = \frac{1}{2}(a_{\max} + a_{\min}) = \frac{1}{2}(85^\circ + 45^\circ) = 65^\circ,$$

$$\phi = 90^\circ - \frac{1}{2}(a_{\max} - a_{\min}) = 90^\circ - 20^\circ = 70^\circ.$$

Jos taas yläkulminaatio tapahtuu zeniitin pohjoispuolella, on

$$\begin{cases} a_{\max} &= 90^\circ - \delta + \phi, \\ a_{\min} &= -90^\circ + \phi + \delta. \end{cases}$$

\Rightarrow

$$\delta = 90^\circ - \frac{1}{2}(a_{\max} - a_{\min}) = 70^\circ,$$

$$\phi = \frac{1}{2}(a_{\max} + a_{\min}) = 65^\circ.$$

2.7 a) Korkeus yläkulminaatioissa on

$$a = 90^\circ - \phi + \delta = 90^\circ - 60^\circ 10' - 26^\circ 19' = 3^\circ 31' > 0^\circ,$$

joten näkyyhän se, vaikkakin sangen matalalla.

b) Kohde on sirkumpolaarinen, jos sen korkeus alakulminaatioissa on $> 0^\circ$ eli

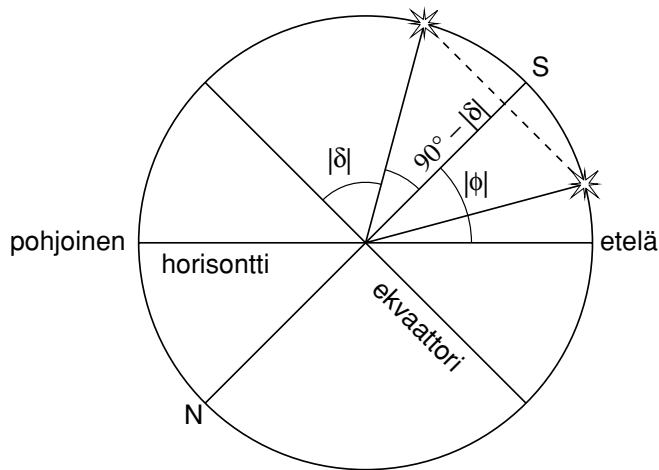
$$\phi + \delta - 90^\circ > 0^\circ \iff \delta > 90^\circ - \phi.$$

Helsingissä sirkumpolaarisia ovat tähdet, joille $\delta > 29^\circ 50'$. (Refraktion takia riittää itse asiassa $35'$ pienempi deklinaatio, $\delta > 29^\circ 15'$). Vegan deklinaatio toteuttaa tämän ehdon, joten se on sirkumpolaarinen. Korkeus alakulminaatioissa on $\delta - (90^\circ - \phi) = 8^\circ 54'$.

2.8 a) Castor on sirkumpolaarinen, kun $\delta > 90^\circ - \phi$ eli $\phi > 90^\circ - \delta = 90^\circ - 31^\circ 56' = 58^\circ 4'$. Refraktion takia riittää jo $\phi > 58^\circ 4' - 35' = 57^\circ 29'$.

b) Korkeus meridiaanissa on $a = 90^\circ - \phi + \delta = 90^\circ$, mikä on mahdollista, jos leveys on $\phi = \delta = 7^\circ 24'$.

c) Tilanne on mahdollinen vain eteläisellä pallonpuoliskolla (päävääntäsaajalla maksimikorkeus olisi $90^\circ - 60^\circ 46' = 29^\circ 14'$).



Maksimikorkeus etelähorisontista on

$$\begin{aligned} a_{\max} &= 90^\circ - |\delta| + |\phi| \geq 30^\circ \Rightarrow |\phi| \geq |\delta| - 60^\circ \\ &= 60^\circ 46' - 60^\circ = 0^\circ 46'. \end{aligned}$$

Pohjoinen leveys, jolla tilanne on mahdollinen, on siis $0^\circ 46'$ eteläistä leveyttä. Eteläisin leveys saadaan ehdosta, että alakulminaatiokorkeuden

$$a_{\min} = -90^\circ + |\delta| + |\phi|$$

on oltava $\leq 30^\circ$ eli

$$|\phi| \leq 120^\circ - |\delta| = 120^\circ - 60^\circ 46' = 59^\circ 14'.$$

Havaintopaikan on siis oltava välillä $[0^\circ 46', 59^\circ 14']$ eteläistä leveyttä.

2.9 Lähdetään muunnoskaavasta

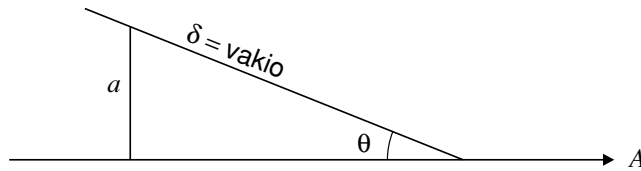
$$\sin \delta = \sin a \sin \phi + \cos a \cos \phi \cos A. \quad (1)$$

Derivoidaan tämä yhtälö korkeuden a suhteen, kun $\delta = \text{vakio}$:

$$0 = \cos a \sin \phi - \sin a \cos \phi \cos A - \cos a \cos \phi \sin A \frac{dA}{da}.$$

Horisontissa $a = 0$, joten

$$0 = \sin \phi - \cos \phi \sin A \frac{dA}{da} \Rightarrow \frac{da}{dA} = \frac{\sin A}{\tan \phi}.$$



Kun $a = 0$, saadaan kaavasta (1)

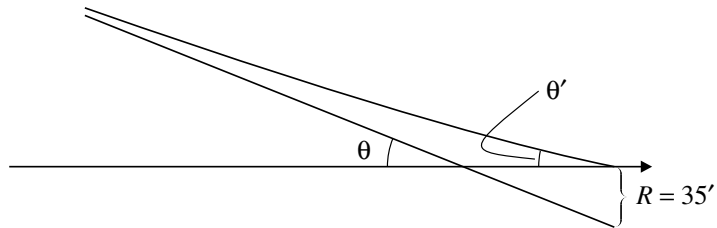
$$\sin \delta = \cos \phi \cos A \Rightarrow \cos A = \sin \delta / \cos \phi$$

$$\Rightarrow \sin A = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \delta / \cos^2 \phi}$$

$$\Rightarrow \tan \theta = \left| \frac{da}{dA} \right| = \frac{\sqrt{\cos^2 \phi - \sin^2 \delta}}{\sin \phi}.$$

Kesäpäivän seisauksen aikaan on Auringon deklinaatio $23^\circ 26'$. Leveysasteella 60° saadaan tällöin kulmaksi $\theta = 19.3^\circ$.

Refraktio kasvaa horisonttia kohti, joten todellinen nousu- ja laskekulma on edellä saatua pienempi.



2.10 Tähtiäika on kevättasauspisteen tuntikulma. Se voidaan ilmoittaa mielivaltaisen tähden rektaskension α ja tuntikulman h avulla:

$$\Theta = \alpha + h.$$

a) Etelässä tuntikulma on $h = 0$, joten $\Theta = \alpha = 6 \text{ h } 42.9 \text{ min}$.

b) Pohjoisessa $h = 12$ h, joten $\Theta \approx 12$ h + 12 h = 24 h = 0 h.

- 2.11 Orionin keskikohdan deklinaatio on $\delta \approx 0^\circ$ eli se on ekvaattorilla. Ekvaattorilla oleva kohde nousee aina idästä, joten tuntikulma on $h = -6$ h. Orionin rektaskensio on noin 5 h 30 min, joten

$$\Theta = 5 \text{ h } 30 \text{ min} - 6 \text{ h} = -30 \text{ min} = 23 \text{ h } 30 \text{ min}.$$

Otavan tuntikulma on

$$h = \Theta - \alpha \approx 23 \text{ h } 30 \text{ min} - 12 \text{ h} = 11 \text{ h } 30 \text{ min}$$

eli Otava näkyy suunnilleen pohjoisessa Pohjantähden alapuolella.

- 2.12 a) $\Theta = \alpha + h = 14 \text{ h } 13 \text{ min} + 19 \text{ h } 9 \text{ min} = 33 \text{ h } 22 \text{ min} = 9 \text{ h } 22 \text{ min}$.
 b) $h = 15 \times (19 + 9/60)^\circ = 287.25^\circ$. Korkeus ja atsimuutti saadaan muunnoskaavoista

$$\cos a \sin A = -\cos \delta \sin h = 0.90024$$

$$\cos a \cos A = \sin \delta \cos \phi - \cos \delta \sin \phi \cos h = -0.0764$$

$$\sin a = \sin \delta \sin \phi + \cos \delta \cos \phi \cos h = 0.42863$$

Tarkistuksen vuoksi kannattaa laskea näiden lukujen neliöiden summa. Mikäli ei ole tehty laskuvirheitä, summan on oltava 1 (miksi?).

Korkeus a saadaan oitis paikalla viimeisestä yhtälöstä: $a = \arcsin 0.42863 = 23.58^\circ$.

Atsimuutin laskemisessa onkin sitten oltava huolellinen. Koska $a \in [-90^\circ, +90^\circ]$, $\cos a$ on aina positiivinen (tai nolla). Siispa esimerkiksiämme on $\sin A > 0$ ja $\cos A < 0$. Tämä tarkoittaa, että atsimuutti on välillä $(90^\circ, 180^\circ)$. Saamme $A = 94.85^\circ$ eli Arcturus on likimain lännessä.

Atsimuuttia laskettaessa on muistettava huolehtia oikean neljänneksen valinnasta. Jos käytät laskukonetta, voit laskea atsimuutin käyttämällä koneesta todennäköisesti löytyvää muunnosta suoraikulmaisista koordinaateista napakoordinaatteihin $(x, y) \rightarrow (r, \varphi)$. Tässä x :n arvoksi asetetaan $\cos A$ ja y :n arvoksi $\sin A$. Muunnoksen jälkeen napakoordinaatti φ antaa juuri A :n. Itse asiassa voit aivan hyvin sijoittaa x :ksi edellä lasketun lausekkeen $\cos a \cos A$ arvon ja y :ksi $\cos a \sin A$:n, sillä kummassakin esiintyvä positiivinen vakiokerroin $\cos a$ ei vaikuta millään tavoin suuntaan φ . Jos taas käytät tietokonetta, ohjelmointikielestä löytyy funktio $\arctan2(y, x)$, joka hoitaa saman asian.

c) $h = \Theta - \alpha = 9 \text{ h } 22 \text{ min} - 20 \text{ h } 10 \text{ min} = 13 \text{ h } 12 \text{ min} \Rightarrow \sin a = -0.33 < 0$, joten Altair on horisontin alapuolella ja niin ollen varsin vaikeasti nähtävissä.

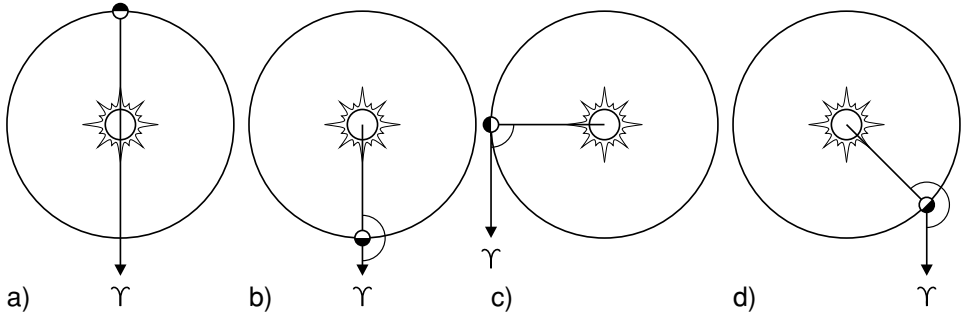
d) Tähtiäika on paikallista aikaa, mutta kellonaika 22:20 yöhykeaikaa. Aikojen vertailemiseksi on ensin laskettava paikallinen aurinkoaika. Helsingin pituusaste on $24^\circ 57'$, mutta yöhyke aika määräytyy pituusasteen 30° mukaan. Paikallinen aika on niin ollen parikymmentä minuuttia yöhykeaikaa jäljessä, eli noin 22:00. Kevätpäiväntasauksen aikaan olisi paikallisaika $\Theta + 12 \text{ h} = 9 \text{ h } 22 \text{ min} + 12 \text{ h} = 21 \text{ h } 22 \text{ min}$. Koska kellonaika on tätä 38 minuuttia suurempi, havainto on tehty noin



$38 \text{ min}/4 \text{ min} = 9\frac{1}{2}$ vuorokautta ennen kevätpäiväntasausta eli 10.3.

2.13 Tähtiaika on kevättasauspisteen tuntikulma ja aurinkoaika on Auringon tuntikulma + 12 tuntia. Jos ajantasauksesta ei tarvitse välittää, todellinen aurinkoaika ja keskiaurinkoaika ovat samoja.

a) Kevätpäiväntasauksen aikana Aurinko on Υ :n suunnassa, joten molempien tuntikulmat ovat samoja, ja aurinkoaika on tähtiaika + 12 h \Rightarrow tähtiaika = 0 h. Ellei kpt. osu kello 12:ksi, voi tähän tulla pieniä poikkeamia, kuitenkin korkeintaan ± 2 minuuttia.



b) Syyspäiväntasauksen aikaan Υ :n tuntikulma on Auringon tuntikulma + 12 h, joten aurinkoaika ja tähtiaika ovat samoja $\Rightarrow \Theta = 12 \text{ h}$.

c) Kesäpäivänseisauksen aikana ollaan edellisten tapausten puolivälissä, ja $\Theta = 6 \text{ h}$.

d) Marraskuun 1. päivä on noin 39 vuorokautta spt:n jälkeen. Spt:n hetkellä tähtiaika = aurinkoaika. Koska tähtiaika edistää noin 4 minuuttia vuorokaudessa aurinkoaikaan nähden, on $\Theta \approx 12 \text{ h} + 39 \times 4 \text{ min} = 14 \text{ h} 36 \text{ min}$.

Jos kello 12 tarkoittaa Helsingin paikallista aikaa eli hetkeä, jolloin Auringon tuntikulma on 0 (ajantasauksestahan ei nyt välitetty), edellä saadut vastaukset pätevät myös Helsingissä. Koska keskipäivä tulee Helsingissä aikaisemmin kuin Greenwichissä, on tähtiaika ehtinyt edistää vähemmän kuin Greenwichissä; tästä aiheutuva virhe on kuitenkin vain noin 20 s. Suurempi virhe aiheutuu siitä, että kpt:n täsmällistä kellonaikaa ei tiedetä. Mikäli tarkoitettiin yöhykeikaa, Auringon tuntikulma ei ole vielä aivan 0, vaan noin 23 h 40 min. Samoin muutkin tuntikulmat ovat noin 20 minuuttia pienempiä kuin edellä, joten myös tähtiajoista on vähennettävä 20 minuuttia. Kohdissa b) ja c) on lisäksi voimassa kesäaika, joten tuloksista on vähennettävä yksi tunti.

2.14 Unohdetaan aluksi ajantasaus. Koska havaintopaikan pituus on 30° , on paikallinen aika sama kuin virallinen aika. Kpt:n hetkellä on tähtiaika = virallinen aika + 12 h eli 13 h. Kesäkuun 3. päivään mennessä aikaa on kulunut $10 + 30 + 31 + 3 = 74$ vuorokautta. Koska tähtiaika edistää 3 min 56 s vuorokaudessa, edistystä on tapahtunut $74 \times 3 \text{ min } 56 \text{ s} = 4 \text{ h } 51 \text{ min } 4 \text{ s}$, joten kysytty tähtiaika on 17 h 51 min.

Kpt:n aikoihin ajantasaus $E.T.$ on noin -7 min, eli todellinen aurinkoaika on 7 min vähemmän kuin virallinen aika (tai oikeammin keskiaurinkoaika). Niin ollen Auringon ja Υ :n tuntikulmat ovat myös 7 min pienempiä. Aikaväli mitataan edelleenkin tasaisesti kuluvan keskiaurinkoaajan tai virallisen ajan avulla, joten ainoa vaikutus on lopputuloksen pienentyminen 7 minuutilla. Kysytty tähtiaika olisi siis 17 h 44 min.

- 2.15 Auringon ekliptikaalinen leveys on $\beta = 0^\circ$, joten muunnoskaavat yksinkertaistuvat muotoon

$$\sin \alpha \cos \delta = \cos \varepsilon \sin \lambda$$

$$\cos \alpha \cos \delta = \cos \lambda$$

$$\sin \delta = \sin \varepsilon \sin \lambda$$

Sijoitetaan näihin $\lambda = 330^\circ$ ja $\varepsilon = 23^\circ 26'$:

$$\sin \alpha \cos \delta = -0.459$$

$$\cos \alpha \cos \delta = +0.866$$

$$\sin \delta = -0.199$$

Viimeisestä yhtälöstä saadaan $\delta = -11.47^\circ = -11^\circ 28'$. Sijoittamalla tämä kahteen ensimmäiseen yhtälöön saadaan $\sin \alpha = -0.468$ ja $\cos \alpha = 0.884$. Tästä nähdään, että α :n on oltava välillä $[270^\circ, 360^\circ]$. Siispä $\alpha = 332.09^\circ = 22.14$ h = 22 h 8 min. Kevättasauspäivänä $\lambda = 0^\circ$, joten $\lambda = 330^\circ$ noin $(30/360) \times 365$ d ≈ 30 d ennen ktp:ää. Koska ktp on keskimäärin 21.3, kyseinen päivämäärä on noin 19. helmikuuta.

- 2.16 Sijoittamalla annetut arvot muunnoskaavoihin saadaan

$$\sin \lambda \cos \beta = 0.9418$$

$$\cos \lambda \cos \beta = 0.3360$$

$$\sin \beta = 0.0001$$

$$\Rightarrow \beta = 0.003^\circ = 0^\circ 0', \quad \lambda = 70.36^\circ = 70^\circ 22'.$$

$$\lambda_{\oplus} = \lambda + 180^\circ = 250^\circ 22', \quad \beta_{\oplus} = 0^\circ 0'.$$

- 2.17 Kun lasketaan Auringon keskipisteen nousuaika refraktiosta välittämättä, on

$$\sin a = \cos h \cos \delta \cos \phi + \sin \delta \sin \phi = 0,$$

josta

$$\cos h = -\tan \delta \tan \phi = -\tan 22^\circ \tan 65^\circ = -0.8664$$

$$\Rightarrow h = \pm 150.0^\circ = \pm 10$$
 h 0 min.

Tässä + vastaa laskua ja - nousua. Nousuhetkellä tuntikulma on -10 h = 14 h. Tähtiaika = $\alpha + h = 4$ h 35 min + 14 h 0 min = 18 h 35 min.



- 2.18 Nousu- ja laskuajat saadaan kaavasta $\cos h = -\tan \delta \tan \phi$. Tähän tarvitaan Auringon deklinaatio, joka voidaan lausua rektaskension avulla: Sijoitetaan Auringon leveys $\beta = 0^\circ$ muunnoskaavaan

$$\sin \beta = \cos \varepsilon \sin \delta - \sin \varepsilon \cos \delta \sin \alpha,$$

jolloin saadaan

$$\tan \delta = \tan \varepsilon \sin \alpha.$$

Kun tämä sijoitetaan nousu- ja laskuaikayhtälöön, saadaan

$$\cos h = -\tan \varepsilon \sin \alpha \tan \phi.$$

Napapiirillä leveys on $\phi = 90^\circ - \varepsilon$, joten $\tan \phi = \tan(90^\circ - \varepsilon) = \cot \varepsilon = 1/\tan \varepsilon \Rightarrow$

$$\cos h = -\sin \alpha = \sin(-\alpha) = \cos(90^\circ + \alpha) \Rightarrow$$

$$h_1 = 90^\circ + \alpha \Rightarrow \Theta_1 = \alpha + h_1 = 90^\circ + 2\alpha$$

$$h_2 = -90^\circ - \alpha \Rightarrow \Theta_2 = \alpha + h_2 = -90^\circ = \text{vakio!}$$

Auringon noustessa on sen tuntikulma välillä $180^\circ \leq h \leq 360^\circ$, eli nousua vastaa

$$h_1, \quad \text{kun } 90^\circ \leq \alpha \leq 270^\circ \quad (22.6 - 22.12)$$

$$h_2, \quad \text{kun } -90^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ \quad (22.12 - 22.6)$$

Auringon laskiessa on $0^\circ \leq h \leq 180^\circ$ ja päivämäärät siis päinvastoin kuin edellä. Kysytty tähtiaika on $\Theta_0 = \Theta_2 = -90^\circ = 270^\circ = 18 \text{ h}$.

- 2.19 a) $\cos h = -\tan 23^\circ 26' \tan 68^\circ 3' = -1.075$. Tällähän ei ole ratkaisua, mikä tarkoittaa, ettei Aurinko nouse eikä laske. Paikkakunta on napapiirin pohjoispuolella, ja aika on keskikesä, joten Aurinko pysyttelee horisontin yläpuolella koko päivän.

b) $\cos h = -0.745 \Rightarrow h = \pm 138.1^\circ$. Päivän pituus on $2|h| = 276.3^\circ = 18 \text{ h } 25 \text{ min}$.

c) $\cos h = -0.188 \Rightarrow h = \pm 100.8^\circ \Rightarrow 2|h| = 201.7^\circ = 13 \text{ h } 27 \text{ min}$.

- 2.20 a) $\cos h = -0.756 \Rightarrow h = \pm 139.09^\circ$; päivän pituus on niin ollen $2|h| = 18 \text{ h } 32 \text{ min}$.

b) Auringon säde näkyy noin $16'$ kulmassa. Koska horisonttirefraktio nostaa Auringon kuvaa $35'$ ylöspäin, Auringon todellinen korkeus sen yläreunan koskettaessa horisonttia on $a = -(35' + 16') = -51'$. Ratkaistaan siis, milloin Auringon korkeus on $-51'$:

$$\begin{aligned} \cos h &= \frac{\sin a - \sin \delta \sin \phi}{\cos \delta \cos \phi} \\ &= \frac{\sin(-51') - \sin(23^\circ 26') \sin(60^\circ 10')}{\cos(23^\circ 26') \cos(60^\circ 10')} = -0.788 \end{aligned}$$

$\Rightarrow h = \pm 142.03^\circ = \pm 9.47 \text{ h} \Rightarrow$ päivän pituus on $18 \text{ h } 56 \text{ min}$.



Nousevan Auringon suuntaa laskettaessa on valittava negatiivinen tuntikulman arvo. Muunnoskaavoista

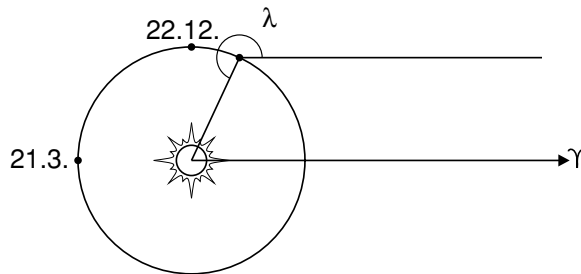
$$\sin A \cos a = \sin h \cos \delta$$

$$\cos A \cos a = \cos h \cos \delta \sin \phi - \sin \delta \cos \phi$$

saadaan $\sin A = -0.5646$ ja $\cos A = -0.8254$, joten $A = -145.6^\circ$. Aurinko nousee siis pohjoiskoillisesta.

- 2.21 Talvipäivänseisauksen aikaan noin 22.12 Auringon longitudi olisi 270° . Neito S. aloitti itsellisen elämänsä 16 päivää tätä ennen, joten Auringon longitudi oli

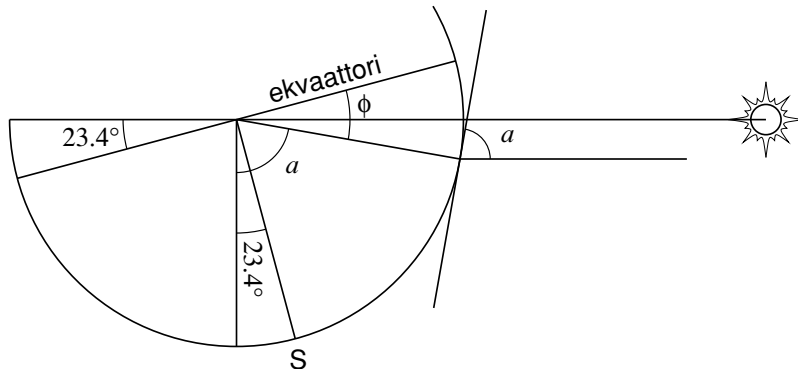
$$\lambda_{\odot} = 270^\circ - (16/365.25) \times 360^\circ \approx 254^\circ.$$



a) Jos tähtikartasta löytyy ekliptika, Auringon paikka nähdään suoraan longitudin avulla, muuten on laskettava muunnoskaavoista rektaskensio ja deklinaatio. Kun $\beta_{\odot} = 0^\circ, \lambda_{\odot} = 254^\circ$, on $\alpha_{\odot} = 16 \text{ h } 50 \text{ min}, \delta_{\odot} = -22.5^\circ$. Kartasta nähdään, että tällainen paikka sijaitsee Käärmeenkantajan (Ophiuchus) tähdistössä.

b) Horoskooppimerkit määräytyvät longitudin avulla siten, että jos $\lambda \in [0^\circ, 30^\circ]$, on merkki Oinas, jos $\lambda \in [30^\circ, 60^\circ]$, on merkki Härkä jne. Väli $[240^\circ, 270^\circ]$ on nimeltään Jousimies, vaikka saman niminen tähdistö onkin ihan muualla. Astrologeja tällaiset pienet epätarkkuudet eivät tunnu lainkaan häiritsevän.

2.22



Koska meillä on joulukuun ja Aurinko liikkuu vastapäivään, paikka on jossakin Kauriin käänntöpiirin eteläpuolella. Joulun aikaan on

Auringon deklinaatio likimain -23.4° . Korkeus pohjoisessa on havaintojen perusteella $a = \arctan 3 = 71.6^\circ$. Leveys on siis $90^\circ + 23.4^\circ - 71.6^\circ = 41.8^\circ$ eteläistä leveyttä.

Tämä tapahtui aikana, jolloin digitaalikelloja ei ollut vielä keksitty. Niinpä kellonaika voi yhtä hyvin olla 2:32 tai 14:32. Aikakerro Suomen vyöhykeikaan on siis joko 2 h 32 min tai -9 h 28 min. Edellinen vastaa pituusaste-eroa 38° länteen ja jälkimmäinen 142° itään. Koska Suomen vyöhykeika perustuu pituusasteen 30° itäistä pituutta paikalliseen aikaan, turistikin pituusaste on joko 8° W tai 172° E. Edellinen näistä on Etelä-Atlantilla ja jälkimmäinen Uudessa Seelannissa. Hotellihuone viittaa vahvasti jälkimmäiseen vaihtoehtoon.

- 2.23 Kirjoitetaan aluksi muunnoskaavat $(a, A) \rightarrow (h, \delta)$ erikseen kummallekin kohteelle. Tarvitsemme muunnoskaavoista vain kahta jälkimmäistä:

$$\cos h \cos \delta = \cos A \cos a \sin \phi + \sin a \cos \phi \quad (1)$$

$$\sin \delta = -\cos A \cos a \cos \phi + \sin a \sin \phi \quad (2)$$

$$\cos(h + 180^\circ) \cos \delta' =$$

$$-\cos h \cos \delta' = \cos A' \cos a' \sin \phi + \sin a' \cos \phi \quad (3)$$

$$\sin \delta' = -\cos A' \cos a' \cos \phi + \sin a' \sin \phi \quad (4)$$

Näistä on nyt eliminoitava A , A' ja h . Ratkaistaan (2):sta $\cos A$ ja sijoitetaan (1):een. Vastaavasti (4):stä ratkaistaan $\cos A'$ ja sijoitetaan (3):een:

$$\cos h \cos \delta = \frac{\sin a \sin \phi - \sin \delta}{\cos \phi} \sin \phi + \sin a \cos \phi$$

$$-\cos h \cos \delta' = \frac{\sin a' \sin \phi - \sin \delta'}{\cos \phi} \sin \phi + \sin a' \cos \phi$$

Kerrotaan edellinen $\cos \delta'$:lla ja jälkimmäinen $\cos \delta$:lla ja laskeaan yhtälöt yhteen:

$$0 = \cos \delta' (\sin a \sin \phi - \sin \delta) \frac{\sin \phi}{\cos \phi} + \cos \delta' \sin a \cos \phi$$

$$+ \cos \delta (\sin a' \sin \phi - \sin \delta') \frac{\sin \phi}{\cos \phi} + \cos \delta \sin a' \cos \phi$$

Kerrotaan tämä $\cos \phi$:llä, sijoitetaan $\cos^2 \phi = 1 - \sin^2 \phi$ ja siivotaan roskat pois, jolloin jäljelle jää

$$\sin \phi (\cos \delta' \sin \delta + \cos \delta \sin \delta') = \cos \delta' \sin a + \cos \delta \sin a'$$

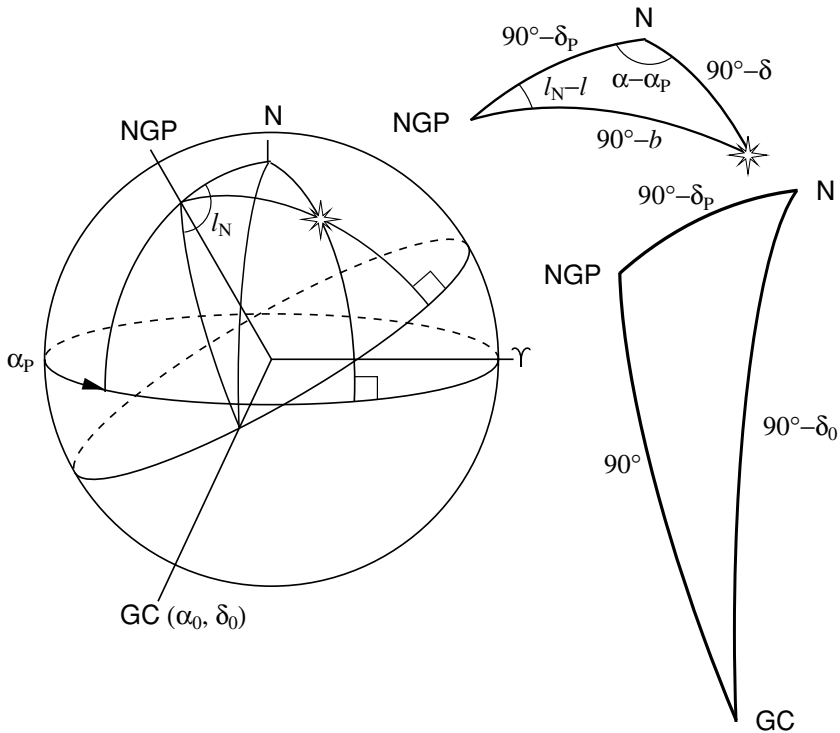
Tästä saadaankin haluttu yhtälö, kun huomataan, että sulklauseke on $\sin(\delta + \delta')$.

- 2.24 Kuvassa on merkitty NGP = Linnunradan pohjoisnapa, GC = Linnunradan keskustan suunta ja N = taivaannapa. Ensiksi on laskettava taivaannavan galaktinen pituus ℓ_N . Tämä saadaan ko-



sinilauseella kuvan alemmasta pallokolmiosta:

$$\begin{aligned} & \cos(90^\circ - \delta_0) \\ &= \cos(90^\circ - \delta_P) \cos 90^\circ + \cos \ell_N \sin(90^\circ - \delta_P) \sin 90^\circ \\ \Rightarrow \\ & \cos \ell_N = \frac{\sin \delta_0}{\cos \delta_P} = -0.5446 \Rightarrow \ell_N = 123.00^\circ. \end{aligned}$$

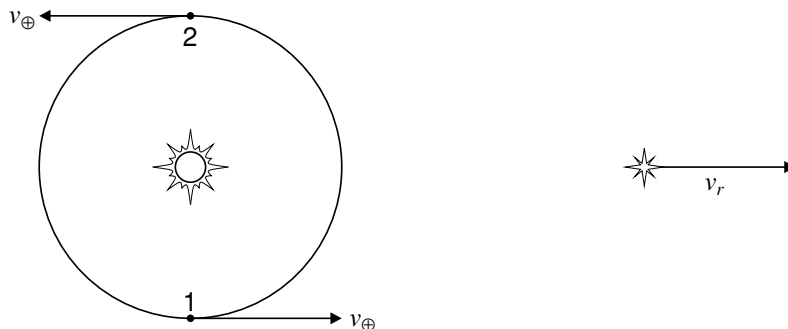


Muunnoskaavat saadaan nyt oikealla ylhäällä olevasta pallokolmiosta:

$$\begin{aligned} & \sin(90^\circ - b) \sin(\ell_N - \ell) = \sin(90^\circ - \delta) \sin(\alpha - \alpha_P) \\ & \sin(90^\circ - b) \cos(\ell_N - \ell) = \\ & \quad - \cos(\alpha - \alpha_P) \sin(90^\circ - \delta) \cos(90^\circ - \delta_P) \\ & \quad + \cos(90^\circ - \delta) \sin(90^\circ - \delta_P) \\ & \cos(90^\circ - b) = \\ & \quad \cos(\alpha - \alpha_P) \sin(90^\circ - \delta) \sin(90^\circ - \delta_P) \\ & \quad + \cos(90^\circ - \delta) \cos(90^\circ - \delta_P) \\ \Rightarrow \\ & \cos b \sin(\ell_N - \ell) = \cos \delta \sin(\alpha - \alpha_P) \\ & \cos b \cos(\ell_N - \ell) = -\cos \delta \sin \delta_P \cos(\alpha - \alpha_P) + \sin \delta \cos \delta_P \\ & \sin b = \cos \delta \cos \delta_P \cos(\alpha - \alpha_P) + \sin \delta \sin \delta_P \end{aligned}$$

$$2.25 \quad \mu = \sqrt{(0.5 \times 15)^2 \cos^2 60^\circ + 1.2^2} / 100 \text{ a} \approx 3.9'' / 100 \text{ a}.$$

2.26 Olkoon v_r tähden radiaal nopeus ja v_\oplus Maan ratanopeus.



Ensimmäisen havainnon aikana on $v_1 = v_r - v_\oplus$ ja toisen $v_2 = v_r + v_\oplus \Rightarrow$

$$\frac{\Delta\lambda_1}{\lambda} = \frac{v_1}{c} = \frac{v_r - v_\oplus}{c}$$

$$\frac{\Delta\lambda_2}{\lambda} = \frac{v_2}{c} = \frac{v_r + v_\oplus}{c}$$

\Rightarrow

$$v_r = c \frac{\Delta\lambda_1 + \Delta\lambda_2}{2\lambda} = c \frac{0.113 + 0.028}{2 \times 422.7}$$

$$= 5 \times 10^4 \text{ m s}^{-1} = 50 \text{ km s}^{-1},$$

$$v_\oplus = c \frac{\Delta\lambda_2 - \Delta\lambda_1}{2\lambda} = c \frac{0.113 - 0.028}{2 \times 422.7}$$

$$= 3 \times 10^4 \text{ m s}^{-1} = 30 \text{ km s}^{-1}.$$

2.27 Ominaisliikkeen vaikutus:

$$\mu_\alpha = -0.037 \text{ s a}^{-1} = -3.7 \text{ s} / 100 \text{ a} \Rightarrow \text{muutos } -4 \text{ s},$$

$$\mu_\delta = -1.12'' \text{ a}^{-1} = -112'' / 100 \text{ a} \Rightarrow \text{muutos } -2'.$$

Prekessiosta aiheutuva muutos:

$$\frac{d\alpha}{dt} = m + n \sin \alpha \tan \delta$$

$$= 3.07 \text{ s a}^{-1} + 1.34 \text{ s a}^{-1} \sin 100.19^\circ \tan(-16.58^\circ)$$

$$= 2.68 \text{ s a}^{-1},$$

$$\frac{d\delta}{dt} = n \cos \alpha$$

$$= 20.0'' \text{ a}^{-1} \cos 100.19^\circ = -35.4'' \text{ a}^{-1}.$$

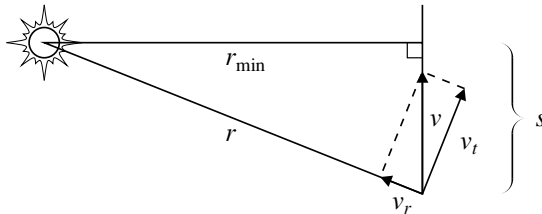
Sadassa vuodessa prekession vaikutus on siis $d\alpha = 268 \text{ s} = 4 \text{ min } 28 \text{ s}$, $d\delta = -354'' \approx -6'$. Uudet koordinaatit ovat

$$\alpha_{2000} = 6 \text{ h } 40 \text{ min } 45 \text{ s} - 4 \text{ s} + 4 \text{ min } 28 \text{ s} = 6 \text{ h } 45 \text{ min } 9 \text{ s},$$

$$\delta_{2000} = -16^\circ 35' - 2' - 6' = -16^\circ 43'.$$

Tässä tapauksessa korjaukset ovat hyvin pieniä, joten on samantekevää, missä järjestyksessä ne tehdään. Jos aikaväli on pitempi, on ominaisliikkeen vaikutus laskettava ensin (sillä sen komponentit on ilmoitettu alkuperäisen epookin koordinaateissa) ja sitten vasta siirryttävä uuteen koordinaatistoon.

- 2.28 Kun ominaisliike ilmoitetaan yksiköissä $'' a^{-1}$ ja etäisyys parsekeina, on tangentialinopeus kilometreinä sekunnissa $v_t = 4.74\mu r = 4.74\mu/\pi$, missä π on parallaksi kaarisekunteina. Sิริukselle $v_t = 4.74 \times 1.32/0.375 \text{ km s}^{-1} = 16.7 \text{ km s}^{-1}$ ja kokonaisnopeus $v = \sqrt{v_t^2 + v_r^2} = 18.5 \text{ km s}^{-1}$.

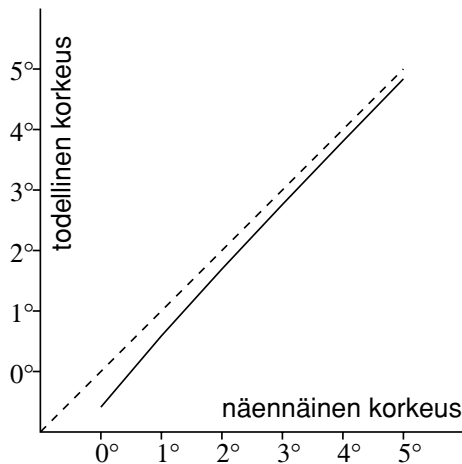


Kuvan yhdenmuotoisista kolmioista nähdään, että $s/r = |v_r|/v$, joten aikaa kuluu

$$t = \frac{s}{v} = \frac{r|v_r|}{v^2} = \frac{2.67 \times 3.086 \times 10^{13} \text{ km} \times 8 \text{ km s}^{-1}}{(18.5 \text{ km s}^{-1})^2} = 1.92 \times 10^{12} \text{ s}$$

eli noin 61 000 vuotta. Koska $r_{\min}/r = v_t/v$, lyhin etäisyys on $r_{\min} = v_t r/v = 16.7 \text{ km s}^{-1} \times 2.67 \text{ pc}/18.5 \text{ km s}^{-1} = 2.40 \text{ pc}$ ja parallaksi $0.42''$. Ominaisliike on tällöin $v/4.74r_{\min} = 1.62'' a^{-1}$.

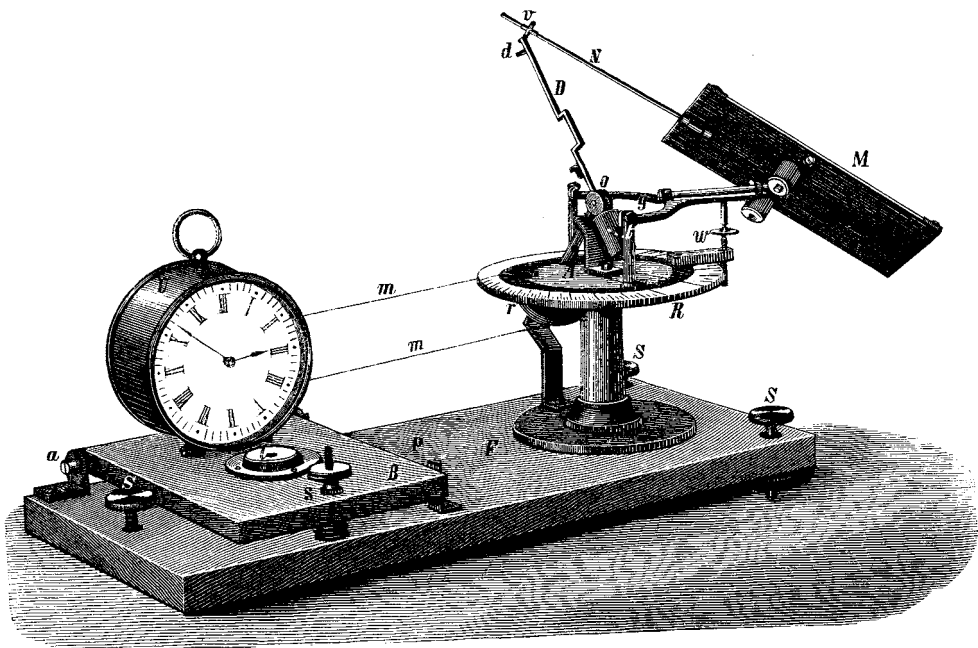
- 2.29



Kun Auringon alareunan näennäinen korkeus on 0° eli se näkyy horisontissa, sen todellinen korkeus on $-35.5'$. Yläreunan todell-

linen korkeus samalla hetkellä on $-35.5' + 32' = -3.5'$. Todellisuudessa Aurinko on siis jo kokonaan horisontin alapuolella. Yläreunan näennäinen korkeus on $25'$.

Auringon läpimitta pystysuunnassa saadaan ylä- ja alareunan näennäisten korkeuksien erotuksena, joten se on $25'$. Tämä on pienempi kuin todellinen läpimitta, joten Aurinko näyttää litistyneeltä (refraktio ei tietenkään muuta läpimittaa vaakasuunnassa).



3 Havaintolaitteet

- 3.1 Kuun etäisyys Maasta on noin 384 400 km ja halkaisija 3476 km, joten se näkyy kulmassa

$$\alpha_Q = \frac{3476 \text{ km}}{384\,400 \text{ km}} = 9.04 \times 10^{-3} \text{ rad} = 31.1'.$$

Jupiter on suurimmillaan oppositiossa, jolloin sen etäisyys Maasta on 4.203 AU. Jupiterin halkaisija on 142 000 km, joten sen kulmaläpimitta on

$$\alpha_J = \frac{1.42 \times 10^8 \text{ m}}{4.203 \times 1.496 \times 10^{11} \text{ m}} = 2.26 \times 10^{-4} \text{ rad} = 46.6''.$$

Tarvittava suurennus on $\omega = \alpha_Q/\alpha_J = 40$.

- 3.2 Filmin mustuma riippuu siihen osuneesta energiasta (fotonien määrästä), mikä puolestaan on valaistus (vuontiheys) filmillä kerrottuna valotusajalla t . Valaistus on verrannollinen objektiivin pinta-alaan ja kääntäen verrannollinen polttovälin f neliöön (sillä f on filmin etäisyys objektiivista). Saman mustuman aikaansaamiseksi täytyy siis olla $D_1^2 t_1 / f_1^2 = D_2^2 t_2 / f_2^2$, missä D_1 ja D_2 ovat objektiivien halkaisijat. Valotusaikojen suhteeksi saadaan

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{(D_1/f_1)^2}{(D_2/f_2)^2} = \frac{(20 \text{ cm}/150 \text{ cm})^2}{(15 \text{ cm}/200 \text{ cm})^2} = 3.16.$$

Tarvitaan siis noin 3.2 sekunnin valotus.

b) $s_1 = \alpha_Q f_1 = 1.35 \text{ cm}$, $s_2 = \alpha_Q f_2 = 1.80 \text{ cm}$.

c) Suurennus on $\omega = f/f'$, missä f on objektiivin ja f' okulaarin polttoväli. Kun objektiivin polttoväli on 150 cm ja okulaarin 2.5 cm on suurennus 60. Jos objektiivin polttoväli on 200 cm, sama okulaari antaa 80-kertaisen suurennuksen.

- 3.3 Kulmassa α näkyvän kohteen kuvan pituus levyllä on $s = f\alpha$, joten

$$\alpha = s/f = 9 \text{ cm}/100 \text{ cm} = 0.09 \text{ rad} = 5.2^\circ.$$

Voidaan siis kuvata alue $5.2^\circ \times 5.2^\circ$. Kuun läpimitta levyllä on $s_Q = \alpha_Q f = 9.0 \text{ mm}$.

- 3.4 Erotuskyky on $\theta \approx \lambda/D$, missä λ on aallonpituus ja D objektiivin halkaisija. Jos objektiivi on pyöreä, erotuskyvylle voidaan käyttää myös lauseketta $1.22\lambda/D$. Tämä on keskellä olevaa kirkkainta aluetta eli Airyn kiekkoa ympäröivän sisimmän tumman renkaan säde. Kyseessä on kuitenkin hieman mielivaltaisesti valittu teoreettinen raja, joten ykköstä lähellä olevan kertoimen 1.22 käyttö/unohtaminen ei ole oleellista. Jos kyseessä on kaksi tai

useampia suorassa rivissä olevia teleskooppeja, tätä kerrointa ei pitäisi käyttää.

Näkyvälle valolle voidaan käyttää aallonpituutta $\lambda = 550 \text{ nm}$.

$\zeta \text{ Lyr}$: $\theta = 44'' = 2.13 \times 10^{-4} \text{ rad}$, josta saadaan $D = \lambda/\theta = 550 \times 10^{-9} \text{ m} / 2.13 \times 10^{-4} \approx 3 \text{ mm}$.

$\epsilon^2 \text{ Lyr}$: $\theta = 2.3'' = 1.12 \times 10^{-5} \text{ rad} \Rightarrow D \approx 5 \text{ cm}$.

($\epsilon^1 \text{ Lyr}$ ja $\epsilon^2 \text{ Lyr}$ muodostavat paljain silmin näkyvän kaksoistähdän, jonka komponenttien magnitudit ovat 4.8 ja 4.4 ja välimatka $209''$. Kumpikin komponentti on lisäksi kaksoistähti.)

- 3.5 Erotuskyky on $\theta \approx \lambda/D$. Tähtien kulmaetäisyys on $\theta = a/r$, missä a on tähtien välimatka ja r etäisyys havaitsijasta. Siispä

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{D} = \frac{a}{r} &\Rightarrow r = \frac{aD}{\lambda} = \frac{10 \text{ AU} \times 0.3 \text{ m}}{550 \times 10^{-9} \text{ m}} \\ &= 5.46 \times 10^6 \text{ AU} = 26 \text{ pc}. \end{aligned}$$

Jos kerroin 1.22 pidetään mukana, saadaan 22 pc.

- 3.6 Tähtien kulmaläpimita on

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{2R}{r} = \frac{2 \times 1.2 \times 6.96 \times 10^8 \text{ m}}{1.32 \times 3.086 \times 10^{16} \text{ m}} \\ &= 4.101 \times 10^{-8} \text{ rad} (= 0.0085''). \end{aligned}$$

Optisen teleskoopin halkaisijan tulisi siis olla luokkaa

$$D_{\text{opt}} = \frac{550 \times 10^{-9} \text{ m}}{4.101 \times 10^{-8}} \approx 13 \text{ m}.$$

Jos radioteleskooppi toimii 72 GHz:n taajuudella, sen läpimitan on oltava

$$\begin{aligned} D_{\text{radio}} &= \frac{\lambda}{\alpha} = \frac{c}{\nu\alpha} = \frac{3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}}{72 \times 10^9 \text{ s}^{-1} \times 4.101 \times 10^{-8}} \\ &\approx 100 \text{ km}. \end{aligned}$$

- 3.7 a) Silmän halkaisija on noin 6 mm, joten erotuskyky on

$$\theta = 1.22 \frac{550 \times 10^{-9} \text{ m}}{0.006 \text{ m}} = 1.118 \times 10^{-4} \text{ rad} = 23''.$$

Silmän erotuskyky on todellisuudessa paljon huonompi, sillä se ei määräydy silmän optisten ominaisuuksien vaan reseptorisolujen koon perusteella.

b) 10 MHz vastaa 30 metrin aallonpituutta. 2':n erotuskykyä varten tarvittaisiin noin 60 kilometrin läpimittainen antenni. Jos taajuus nostetaan 1000-kertaiseksi eli 10 GHz:iin, riittää jo 60-metrinen antenni.

- 3.8 22 GHz:n säteilyn aallonpituus on 0.014 m. Antennin erotuskyky on 3.4' tai 4.1' käytetystä kriteeristä riippuen.

- 3.9 Radiolaineiden pituus on taaskin 0.014 m.

a) Antennien välisen kantaviivan suunnassa erotuskyky on

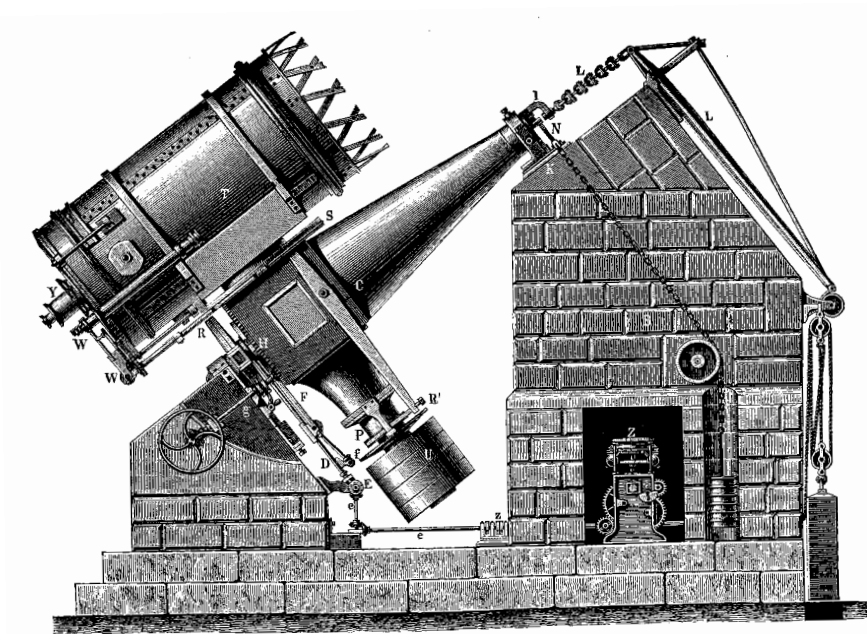
$$\theta = \frac{0.014 \text{ m}}{2900 \times 10^3 \text{ m}} = 4.7 \times 10^{-9} \text{ rad} \approx 0.001''.$$



Antenni ei nyt ole pyöreä, joten kerrointa 1.22 ei sovi käyttää.

b) Sama erotuskyky saavutetaan optisella teleskoopilla, jonka objektiivin halkaisija on

$$D = 1.22 \frac{550 \times 10^{-9} \text{ m}}{4.7 \times 10^{-9}} \approx 140 \text{ m}.$$



4 Fotometriset käsitteet ja magnitudit

- 4.1 Esimerkiksi komponentin 1 magnitudi määritellään sen vuontiheyden avulla:

$$m_1 = -2.5 \lg \frac{F_1}{F_0}.$$

Tästä voidaan laskea vuontiheys:

$$F_1 = F_0 10^{-0.4m_1} = F_0 10^{-0.4 \times 0} = F_0.$$

Vastaavasti toisen komponentin vuontiheys on

$$F_2 = F_0 10^{-0.4m_2} = F_0 10^{-0.4 \times 1.4} = 0.275 F_0.$$

Kokonaisvuontiheys on

$$F_{\text{kok}} = F_1 + F_2 = 1.275 F_0,$$

josta

$$m_{\text{kok}} = -2.5 \lg \frac{F_{\text{kok}}}{F_0} = -2.5 \lg 1.275 \approx -0.3.$$

b) Jos komponentteja on useampia, lasketaan samalla tavoin ensin kunkin vuontiheys: $F_1 = 0.016 F_0$, $F_2 = 0.001 F_0$ ja $F_3 = 0.001 F_0$, joten $F_{\text{kok}} = 0.018 F_0$ ja kokonaismagnitudi $m_{\text{kok}} = -2.5 \lg 0.018 \approx 4.4$.

- 4.2 Vuontiheyksien välillä on yhtälö $F_{\text{kok}} = F_1 + F_2 + F_3$ eli

$$F_0 10^{-0.4 \times 0} = F_0 10^{-0.4 \times 1} + F_0 10^{-0.4 \times 2} + F_0 10^{-0.4 m_3},$$

josta

$$m_3 = -2.5 \lg(10^0 - 10^{-0.4} - 10^{-0.8}) = -2.5 \lg 0.443 \approx 0.9.$$

- 4.3 Olkoon tähden absoluuttinen magnitudi M . Silloin on voimassa

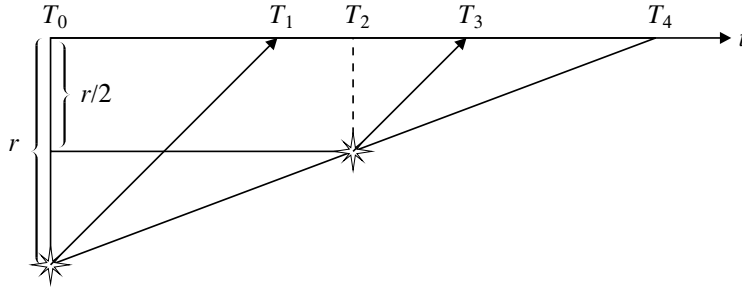
$$\text{torstaina: } m - M = 5 \lg \frac{r}{10 \text{ pc}},$$

$$\text{perjantaina: } m' - M = 5 \lg \frac{r'}{10 \text{ pc}}.$$

Vähennetään jälkimmäinen yhtälö edellisestä, jolloin saadaan

$$\begin{aligned} m - m' &= 5 \lg \frac{r}{r'} \Rightarrow \frac{r}{r'} = 10^{0.2(m-m')} = 10^{0.3} = 2 \\ &\Rightarrow r' = \frac{1}{2} r. \end{aligned}$$

Jos valo etenisi äärettömällä nopeudella, tähden etäisyys olisi pienentynyt puoleen noin vuorokaudessa. Jos näin olisi todella käynyt, maanantaina ei enää olisi ollut tähtitieteilijää tuloksiaan tutkimassa (eikä sen puoleen paljon mitään muutakaan).



Koska valon nopeus on äärellinen, maailmanlopun ennustetta on tutkittava vähän tarkemmin. Edellä olevassa kuvassa on piirretty tähden etäisyys ajan funktiona. Hetkellä T_0 tähti on etäisyydellä r ja lähettää valoa, joka havaitaan hetkellä T_1 (torstaina). Hetkellä T_2 etäisyys on pienentynyt puoleen, ja tähti lähettää valoa, joka havaitaan perjantaina, hetkellä T_3 . Hetkellä T_4 sitten jysähtää. Kuvan yhdenmuotoisten kolmioiden perusteella voimme oitis päätellä, että aikavälit $T_4 - T_3$ ja $T_3 - T_1$ ovat yhtä pitkät, joten tähti kyllä törmää maapalloon lauantaina olipa sen nopeus mikä tahansa.

- 4.4 Koska $1 \text{ pc} \approx 206\,265 \text{ AU}$, Auringon etäisyys on $r = 4.848 \times 10^{-6} \text{ pc}$. Absoluuttinen magnitudi on

$$M_{\odot} = m_{\odot} - 5 \lg \frac{r}{10 \text{ pc}} = -26.7 - 5 \lg 4.848 \times 10^{-7} \approx 4.9.$$

b)

$$\begin{aligned} M_{\text{galaksi}} - M_{\odot} &= -2.5 \lg \frac{L_{\text{galaksi}}}{L_{\odot}} \\ \Rightarrow \frac{L_{\text{galaksi}}}{L_{\odot}} &= 10^{-0.4(-20-4.9)} \approx 9 \times 10^9. \end{aligned}$$

Galaksin säteily vastaa siis 9 miljardia Aurinkoa.

- 4.5 Olkoon tähden magnitudi ennen räjähdystä M ja luminositeetti L sekä räjähdysen jälkeen M' ja L' . Koska $M - M' = -2.5 \lg(L/L')$, on

$$M' = M - 2.5 \lg \frac{L'}{L} = 5 - 2.5 \lg 10^9 = -17.5.$$

Andromedan etäisyydellä näennäinen magnitudi olisi

$$m' = M' + 5 \lg \frac{r}{10 \text{ pc}} = -17.5 + 5 \lg \frac{690 \times 10^3 \text{ pc}}{10 \text{ pc}} \approx 6.7.$$

- 4.6 Räjähdyksen jälkeen absoluuttinen magnitudi on $M = -20$. 3 kpc:n matkalla ekstinktio on $A = ar = 1 \text{ mag kpc}^{-1} \times 3 \text{ kpc} = 3$ magnitudia. Näennäinen magnitudi on niin ollen

$$m = M + 5 \lg \frac{r}{10 \text{ pc}} + A = -20 + 5 \lg 300 + 3 = -4.6.$$

- 4.7 Oletetaan, että kaikkien tähtien absoluuttinen magnitudi on M . Magnitudia m kirkkaampia näkyvät ne tähdet, jotka ovat lähempänä kuin $r(m)$, missä $r(m)$ saadaan yhtälöstä

$$m - M = 5 \lg \frac{r(m)}{10 \text{ pc}} \iff r(m) = 10 \text{ pc} \times 10^{(m-M)/5}.$$

Jos tähdet ovat jakautuneet avaruuteen tasaisesti, on magnitudia m kirkkaampien tähtien lukumäärä $n(m)$ verrannollinen $r(m)$ -säteisen pallon tilavuuteen, ja kysytty suhde on

$$\begin{aligned} \frac{n(m+1)}{n(m)} &= \left(\frac{r(m+1)}{r(m)} \right)^3 = \left(\frac{10 \text{ pc} \times 10^{(m+1-M)/5}}{10 \text{ pc} \times 10^{(m-M)/5}} \right)^3 \\ &= 10^{3/5(m+1-M-m+M)} = 10^{3/5} = 3.98. \end{aligned}$$

Tämä sama päättely voidaan toistaa erikseen kullekin absoluuttiselle magnitudille, joten tulos pätee itse asiassa yleisemminkin kunhan vain kaikkien magnitudien tähdet ovat jakautuneet tasaisesti avaruuteen.

- 4.8 Kolminkertaisessa ikkunassa on kuusi rajapintaa, joten vuontiheys sisällä on

$$F_{\text{sisällä}} = (0.85)^6 F_{\text{ulkona}} = 0.38 F_{\text{ulkona}}.$$

a)

$$m_{\text{sisällä}} - m_{\text{ulkona}} = -2.5 \lg \frac{F_{\text{sisällä}}}{F_{\text{ulkona}}} = -2.5 \lg 0.38 = 1.06.$$

Tähden kirkkaus heikkenee siis 1.06 magnitudia. (Ilmakehän aiheuttama ekstinktio zenitissä on noin 0.2 magnitudia, siis paljon vähemmän kuin ikkunasta johtuva ekstinktio.) Regulauksen magnitudi sisältä nähtynä olisi $1.36 + 1.06 = 2.42$.

b)

$$F_{\text{sisällä}} = e^{-\tau} F_{\text{ulkona}} \Rightarrow \tau = -\ln \frac{F_{\text{sisällä}}}{F_{\text{ulkona}}} = -\ln 0.38 \approx 1.0.$$

Ikkuna aiheuttaa suunnilleen yhtä paljon ekstinktiota kuin koko ilmakehä.

- 4.9 Tähtien etäisyys on $r = 1/\pi = 50 \text{ pc}$. Ekstinktio on

$$A = m - M - 5 \lg \frac{r}{10 \text{ pc}} = 6.0 - 2.5 - 5 \lg 5 = 0.005 \text{ mag.}$$

$$\Rightarrow a = \frac{0.005 \text{ mag}}{50 \text{ pc}} = 0.1 \text{ mag kpc}^{-1}.$$



Ekstinktiota aiheuttava tähtienvälinen aine ei täytä koko avaruutta tasapaksuna massana, vaan esiintyy pilvinä. Jos näkösaatele ei osu yhtään pilveä, ekstinktio on hyvin pieni.

4.10 Visuaalialueen ekstinktio on noin 3 kertaa värieksessi, joten $A_V = 3E_{B-V} = 1.11$. Etäisyys on $r \approx 910$ pc.

4.11 Värieksessin laskemiseksi tarvitaan ekstinktio visuaalialueessa ja niin ollen tähden etäisyys. Aloitetaan siis laskemalla etäisyys. Sehän saadaan yhtälöstä

$$V - M_V = 5 \lg \frac{r}{10 \text{ pc}} + a_V r,$$

missä $a_V = 1 \text{ mag kpc}^{-1}$. Yhtälö on nyt ratkaistava numeerisesti. Lausutaan r kiloparsekeissa ja muokataan yhtälö iterointiin soveliaaseen muotoon

$$15.1 - 1.3 = 5 \lg \frac{1000r}{10 \text{ pc}} + r$$

$$\Rightarrow \lg r = -0.2r + 0.76$$

$$\Rightarrow r = 10^{0.76 - 0.2r}.$$

Valitaan alkuarvoksi vaikkapa $10^{0.76} = 5.75$:

$$r_0 = 5.75$$

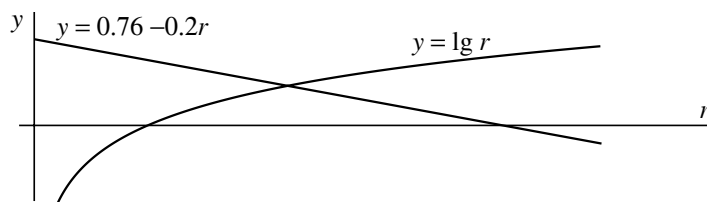
$$r_1 = 10^{0.76 - 0.2r_0} = 0.41$$

$$r_2 = 10^{0.76 - 0.2r_1} = 4.77$$

jne.

jne.

Iterointi suppenee erittäin hitaasti, mutta lopulta kuitenkin päädytään arvoon $r = 2.1$ kpc.

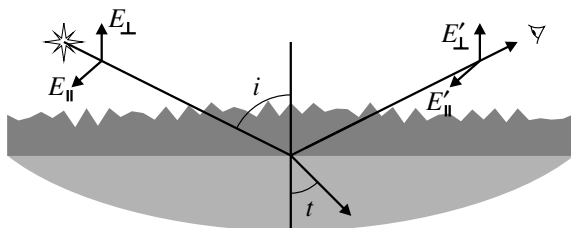


Toinen mahdollisuus on arvioida ratkaisu graafisesti piirtämällä edellä olleen yhtälön $\lg r = -0.2r + 0.76$ kummankin puolen kuvaaja erikseen ja katsomalla, millä r :n arvolla ne leikkaavat.

Tulosta voidaan sitten parannella esimerkiksi edellä käytetyllä iteroinnilla. Kolmella desimaalilla ratkaisu on $r = 2.144$ kpc.

Nyt saadaan ekstinktio $A_V = a_V r = 2.1 \text{ mag}$, joten värieksessi on $E_{B-V} = A_V/3 = 0.7$. Ominaisväri on $(B - V)_0 = (B - V) - E_{B-V} = 1.6 - 0.7 = 0.9$.

4.12



Saapuvaa säteilyä vastaa sähkökenttä, jonka heijastavan pinnan suuntainen komponentti on E_{\parallel} ja tätä vastaan kohtisuora komponentti E_{\perp} . Heijastuneen säteilyn vastaavat suuret ovat E'_{\parallel} ja E'_{\perp} . Pilkulliset suuret voidaan laskea pilkuttomista Fresnelin kertoimien avulla: $E'_{\parallel} = E_{\parallel} R_{\parallel}$ ja $E'_{\perp} = E_{\perp} R_{\perp}$. Saapuvan säteilyn intensiteetti on $I = E_{\parallel}^2 + E_{\perp}^2$ ja heijastuvan $I' = (E'_{\parallel})^2 + (E'_{\perp})^2$. Jos saapuva säteily on polarisoitumatonta, on $E_{\parallel} = E_{\perp}$, joten $r = I'/I = \frac{1}{2}(R_{\parallel}^2 + R_{\perp}^2)$. Snellin kaavan avulla voidaan kertoimien lausekkeista eliminoida veden sisään taittuneen säteilyn suunta: $\sin i = n \sin t$ eli $\cos t = \sqrt{n^2 - \sin^2 i}/n$. Fresnelin kertoimet tulokulman funktiona ovat

$$R_{\parallel} = \frac{\cos i - \sqrt{n^2 - \sin^2 i}}{\cos i + \sqrt{n^2 - \sin^2 i}}, \quad R_{\perp} = \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 i} - n^2 \cos i}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i} + n^2 \cos i}.$$

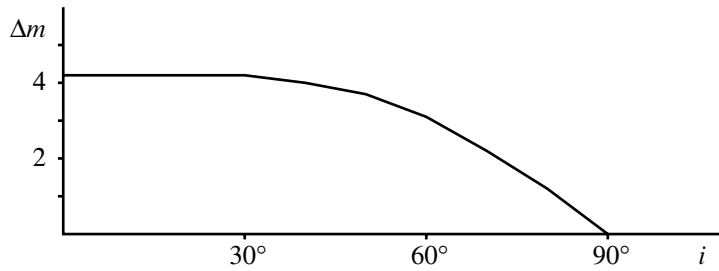
Heijastunut säteily on polarisoitunutta; polarisaatioaste riippuu tulokulmasta i . Kerroin R_{\perp} häviää, kun $\cos i = 1/\sqrt{n^2 + 1}$ eli

$$\tan i = n,$$

mikä tunnetaan Brewsterin ehtona. Tällöin heijastunut säteily on täydellisesti polarisoitunutta. Lammen tapauksessa ($n = 1.33$, jos lampi sisältää pääasiassa vettä) tämä tapahtuu, kun $i \approx 53^\circ$ eli tähden korkeus on 37° .

Seuraavassa taulukossa on annettu kertoimet korkeuden funktiona. Magnitudin muutos on $\Delta m = -2.5 \lg I'/I = -2.5 \lg r$.

korkeus	i	R_{\parallel}	R_{\perp}	r	Δm
0°	90°	-1.000	+1.000	1.000	0.0
10°	80°	-0.675	+0.489	0.347	1.2
20°	70°	-0.467	+0.217	0.133	2.2
30°	60°	-0.337	+0.066	0.059	3.1
40°	50°	-0.257	-0.022	0.033	3.7
50°	40°	-0.206	-0.076	0.024	4.0
60°	30°	-0.175	-0.108	0.021	4.2
70°	20°	-0.155	-0.128	0.020	4.2
80°	10°	-0.145	-0.138	0.020	4.2
90°	0°	-0.142	-0.142	0.020	4.2



Kun i on pieni, on $\sin i \approx 0$ ja $\cos i \approx 1$, jolloin

$$r = \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^2.$$

Kun $n = 1.33$, saadaan tästä $r = 0.020$, kuten pitääkin. Itse asiassa tämä approksimaatio pätee vielä suhteellisen suurille tuloikulman arvoille, $i \leq 30^\circ$.

- 4.13 Tilanne vastaa vaatimatonta rengasmaista auringonpimennystä. Jos tähden säde on R ja planeetan säde r , tähden säteilyvuosta jää pimennyksessä jäljelle pinta-alaan verrannollinen osa

$$f = \frac{\pi R^2 - \pi r^2}{\pi R^2} = 1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2.$$

Toisaalta magnitudieron $\Delta m = 0.02$ avulla lausuttuna vuontiheksien suhde on

$$f = 10^{-0.4\Delta m}.$$

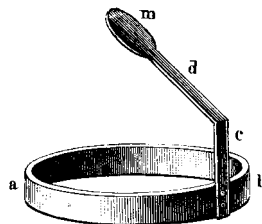
Näistä saadaan

$$\frac{r}{R} = \sqrt{1 - 10^{-0.4\Delta m}} = \sqrt{1 - 10^{-0.4 \times 0.02}} = 0.135.$$

Jos $R = R_\odot = 6.96 \times 10^8$ m, planeetan läpimitta on

$$d = 2r = 2 \times 0.135 \times 6.96 \times 10^8 \text{ m} = 190\,000 \text{ km},$$

mikä on noin 1.3 kertaa Jupiterin läpimitta.



5 Säteilymekanismit

5.1 Siirtymää $n + 1 \rightarrow n$ vastaava aallonpituus λ saadaan yhtälöstä

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right),$$

missä Rydbergin vakio $R = 1.097 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$. Yhtälö voidaan kirjoittaa muotoon

$$\begin{aligned} \frac{n^2(n+1)^2}{(2n+1)} = R\lambda &= 1.097 \times 10^7 \text{ m}^{-1} \times 0.2105 \text{ m} \\ &= 2.309 \times 10^6. \end{aligned}$$

Tästä pitäisi nyt ratkaista n , kun lisäksi vaaditaan, että n on positiivinen kokonaisluku. Arvio n :lle saadaan seuraavasti: joka tapauksessa n on hyvin iso, joten $n + 1 \approx n$ ja $2n + 1 \approx 2n$. Siispä $R\lambda \approx n^2 \times n^2 / 2n = \frac{1}{2}n^3$. Tämän ratkaisu on $n \approx 167$. Koikeilemalla esimerkiksi arvoja $165, \dots, 169$ nähdään, että paras yhteensopivuus havaintojen kanssa saavutetaan, kun $n = 166$, jolloin $\lambda = 0.2104 \text{ m}$. Siirtymä $167 \rightarrow 166$ antaa siis lähes oikean aallonpituuden.

Havaittu voimakas säteily edellyttäisi molempien tilojen korkeita miehityslukuja, jolloin myös siirtymät tilasta 166 alaspäin aiheuttaisivat voimakkaita spektriviivoja. Koska sellaisia ei kuitenkaan havaita, syntyy 21 cm:n viiva jollakin muulla tavalla. Kuten tunnettua, viiva syntyy neutraalin vedyn elektronin spinin kääntymisestä, mutta sehän on jo toinen juttu.

5.2 Intensiteetit saadaan Planckin laista

$$B_\lambda(T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1},$$

missä

$$h = 6.6256 \times 10^{-34} \text{ J s},$$

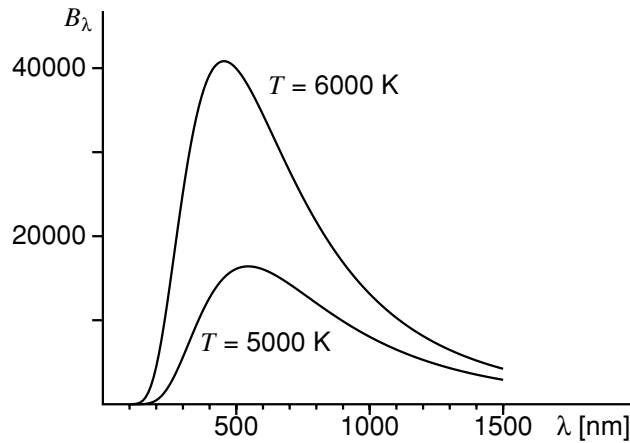
$$c = 2.9979 \times 10^8 \text{ m s}^{-1},$$

$$k = 1.3805 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}.$$

Jos B lausutaan yksiköissä $\text{W m}^{-2} \text{sterad}^{-1} \text{nm}^{-1}$, saadaan

λ [nm]	$B_\lambda(5000 \text{ K})$	$B_\lambda(6000 \text{ K})$
100	0	2
200	470	4472
300	5607	25198
400	12681	39222
500	16115	39954
600	16057	34461
700	14287	27736
...		
1500	2909	4220

On syytä huomata, että eri lämpötiloja vastaavien Planckin funktioiden kuvaajat eivät koskaan leikkaa toisiaan. Jos lämpötila kasvaa, kasvaa säteilyn intensiteetti *kaikilla* aallonpituuksilla.



5.3 Kokonaisintensiteetti on

$$B(T) = \int_0^\infty B_\nu(T) d\nu = \frac{2h}{c^2} \int_0^\infty \frac{\nu^3 d\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}.$$

Sijoitetaan tähän $x = h\nu/kT$, $d\nu = dx kT/h$, jolloin

$$B(T) = \frac{2k^4}{c^2 h^3} T^4 \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1}.$$

Kokonaisvuontiheys on niin ollen

$$F = \pi B(T) = \sigma T^4,$$

$$\sigma = \frac{\pi 2k^4}{c^2 h^3} I, \quad I = \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1},$$

Integraali I on lämpötilasta riippumaton vakio ja siis yksinkertaisesti jokin reaaliluku. Tällainen integraali voidaan aina laskea numeerisesti mielivaltaisella tarkkuudella. Sen analyttinen laskeminen sen sijaan on kohtalaisen työläs tehtävä, eikä onnistu ai-

van alkeismatematiikalla. Asiasta kiinnostuneille esitämme seuraavassa integraalin laskemisen tärkeimmät vaiheet.

1°) Kirjoitetaan aluksi integroitava muotoon

$$g(x) = x^3 e^{-x} \frac{1}{1 - e^{-x}}$$

ja huomataan, että viimeinen tekijä on tällöin erään geometrisen sarjan summa:

$$\frac{1}{1 - e^{-x}} = 1 + e^{-x} + e^{-2x} + e^{-3x} + \dots$$

Integraali voidaan nyt lausua seuraavassa muodossa

$$I = \int_0^{\infty} \left(\sum_{l=1}^{\infty} x^3 e^{-lx} \right) dx.$$

Itse asiassa geometrisen sarja suppenee vain, kun $x > 0$. Jos haluamme tehdä kaiken kunnolla, joudumme esimerkiksi jakamaan integroimisvälin kahteen osaan $[0, \varepsilon]$ ja $[\varepsilon, \infty)$. Koska $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$, saadaan edellisen välin vaikutus integraaliin mielivaltaisen pieneksi, kun ε valitaan riittävän pieneksi. Jälkimmäisessä osassa geometrisen sarja suppenee tasaisesti, ja samoin tekee edellisessä I :n lausekkeessa esiintyvä summa. Tämän johdosta voimme yöunta menettämättä vaihtaa integroinnin ja summauksen järjestyksen:

$$I = \sum_{l=1}^{\infty} \int_0^{\infty} x^3 e^{-lx} dx.$$

2°) Nyt selviää syy tehtävään 1.2. Sieltä näemme, että integraalit voidaan lausua gammafunktion avulla:

$$I = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\Gamma(4)}{l^4} = \Gamma(4)\zeta(4),$$

missä ζ on Riemannin ζ -funktio:

$$\zeta(t) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^t}.$$

Edelleen tehtävän 1.2 perusteella tiedämme, että $\Gamma(4) = 3! = 6$.

3°) Nyt on vielä laskettava $\zeta(4)$, mikä on tehtävän vaikein vaihe. Se tapahtuu keksimällä, että eräiden funktioiden Fourier'n sarjat sopivilla argumentin arvoilla muistuttavat kovasti ζ -funktion lauseketta. Aloitammekin kehittämällä funktion $p(x) = x^{2k}$, $k \in \mathbf{N}$, Fourier'n sarjaksi. Tämä on parillinen funktio, joten se voidaan esittää kosinisarjana

$$p(x) = x^{2k} = c_0 + 2 \sum_{j=1}^{\infty} c_j \cos jx,$$



missä

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^{2k} dx,$$

$$c_j = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^{2k} \cos jx dx.$$

Tarvitsemme funktioiden x^2 ($k = 1$) ja x^4 ($k = 2$) sarjat. Pienellä askartelulla saamme

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \frac{4\pi}{j^2} (-1)^j \cos jx,$$

$$x^4 = \frac{\pi^4}{5} + 2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \left(\frac{8\pi^3}{j^2} - \frac{48\pi}{j^4} \right) (-1)^j \cos jx.$$

Lasketaan nämä sarjat, kun $x = \pi$, jolloin $\cos jx = (-1)^j$:

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \frac{4\pi}{j^2} = \frac{\pi^2}{3} + 4\zeta(2),$$

$$\pi^4 = \frac{\pi^4}{5} + 2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \left(\frac{8\pi^3}{j^2} - \frac{48\pi}{j^4} \right)$$

$$= \frac{\pi^4}{5} + 8\pi^2\zeta(2) - 48\zeta(4).$$

Näistä voimmekin ratkaista tarvittavat ζ -funktion arvot:

$$\zeta(2) = \frac{1}{4} \left(\pi^2 - \frac{\pi^2}{3} \right) = \frac{\pi^2}{6},$$

$$\zeta(4) = \frac{1}{48} \left(\frac{\pi^4}{5} + 8\pi^2\zeta(2) - \pi^4 \right) = \frac{\pi^4}{90}.$$

Siispä, vihdoin ja viimein,

$$I = \Gamma(4)\zeta(4) = 3! \frac{\pi^4}{90} = \frac{\pi^4}{15}.$$

Vakioksi σ saamme siten

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2 h^3}.$$

(Huhhuhh!)

5.4 a) Sijoitetaan Wienin siirtymälakiin

$$\lambda_{\max} T = 0.002898 \text{ K m}$$

lämpötila $T = 2.7 \text{ K}$, jolloin saadaan maksimi-intensiteetin aallonpituudeksi $\lambda_{\max} \approx 1.1 \text{ mm}$. Toinen tapa on käyttää muotoa

$$\frac{T}{\nu_{\max}} = 1.701 \times 10^{-11} \text{ K s}$$

Wienin siirtymälaille. Tämä antaa $\nu_{\max} \approx 1.6 \times 10^{11} \text{ Hz}$. Tätä vastaava aallonpituus olisi $c/\nu_{\max} \approx 1.9 \text{ mm}$.



b) Kokonaisintensiteetti on

$$\begin{aligned}\frac{\sigma T^4}{\pi} &= \frac{5.67 \times 10^{-8} \times 2.7^4}{\pi} \text{ W m}^{-2} \text{ sterad}^{-1} \\ &\approx 9.6 \times 10^{-7} \text{ W m}^{-2} \text{ sterad}^{-1}.\end{aligned}$$

c) Auringon pintalämpötila on noin 5800 K ja näkyvän valon aallonpituudeksi sopii valita 550 nm. Auringon intensiteetti on tällöin

$$I_\lambda(T_\odot) \approx 2.62 \times 10^{13} \text{ W m}^{-2} \text{ sterad}^{-1} \text{ m}^{-1}.$$

Taustasäteilylle saadaan

$$\begin{aligned}I_\lambda(2.7 \text{ K}) &= \frac{2.366 \times 10^{15}}{e^{9689.1} - 1} \text{ W m}^{-2} \text{ sterad}^{-1} \text{ m}^{-1} \\ &\approx \frac{2.366 \times 10^{15}}{10^{4207.9}} \text{ W m}^{-2} \text{ sterad}^{-1} \text{ m}^{-1} \\ &\approx 3.1 \times 10^{-4193} \text{ W m}^{-2} \text{ sterad}^{-1} \text{ m}^{-1}.\end{aligned}$$

Suhteeksi saadaan tästä

$$\frac{I_\lambda(2.7 \text{ K})}{I_\lambda(T_\odot)} = \frac{3.1 \times 10^{-4193}}{2.62 \times 10^{13}} \approx 10^{-4206}.$$

Tämä on sängen pieni luku.

5.5 $T = 0^\circ \text{ C} = 273 \text{ K}$. Kokonaisvuontiheys on $F = \sigma T^4 = 5.669 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4} (273 \text{ K})^4 = 315 \text{ W m}^{-2}$. Säteilyn maksimin aallonpituus on $\lambda_{\text{max}} = 0.0002898 \text{ K m} / 273 \text{ K} = 10.6 \times 10^{-6} \text{ m} = 10.6 \mu\text{m}$.

5.6 On siis laskettava suhde

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} B_\lambda(T) d\lambda \Big/ \int_0^\infty B_\lambda(T) d\lambda.$$

Nimittäjä on ilman muuta $\sigma T^4 / \pi$. Osoittajassa integroimisvälillä on $\lambda \ll \lambda_{\text{max}}$, joten voimme käyttää Wienin approksimaatiota. Osoittaja on siis

$$B' \approx 2hc^2 \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{d\lambda}{\lambda^5 e^{hc/\lambda kT}}.$$

Tähän tekee mieli sijoittaa

$$x = \frac{hc}{\lambda kT}, \quad \lambda = \frac{hc}{kTx}, \quad d\lambda = -\frac{hc}{kTx^2} dx.$$

Ja koska tämän symboliviidakon kirjoittaminen tietokoneen uumeniin on tosi tautista puuhaa ja nukkumaankin pitäisi ehtiä, merkitsemme vaivojemme säästämiseksi vielä

$$a = \frac{hc}{\lambda_1 kT}, \quad b = \frac{hc}{\lambda_2 kT},$$



jolloin

$$B' = \frac{2k^4T^4}{h^3c^2} \int_b^a x^3 e^{-x} dx.$$

Integraali lasketaan helposti integroimalla osittain riittävän monta kertaa:

$$\begin{aligned} I &= \int_b^a x^3 e^{-x} dx = \left| -x^3 e^{-x} + \int_b^a 3x^2 e^{-x} dx \right. \\ &= b^3 e^{-b} - a^3 e^{-a} + 3 \left(\left| -x^2 e^{-x} + \int_b^a 2x e^{-x} dx \right. \right) \\ &= b^3 e^{-b} - a^3 e^{-a} + 3b^2 e^{-b} - 3a^2 e^{-a} \\ &\quad + 6 \left(\left| -x e^{-x} + \int_b^a e^{-x} dx \right. \right) \\ &= b^3 e^{-b} - a^3 e^{-a} + 3b^2 e^{-b} - 3a^2 e^{-a} \\ &\quad + 6b e^{-b} - 6a e^{-a} + 6e^{-b} - 6e^{-a} \\ &= e^{-b}(b^3 + 3b^2 + 6b + 6) - e^{-a}(a^3 + 3a^2 + 6a + 6). \end{aligned}$$

Kysytty suhde on siis

$$\frac{B'}{\sigma T^4/\pi} = \frac{\frac{2k^4T^4}{h^3c^2} I}{\frac{2\pi^4k^4}{15c^2h^3} T^4} = \frac{15}{\pi^4} \left(f\left(\frac{hc}{\lambda_2 kT}\right) - f\left(\frac{hc}{\lambda_1 kT}\right) \right),$$

missä

$$f(x) = e^{-x}(x^3 + 3x^2 + 6x + 6).$$

b) $\lambda_1 = 400 \text{ nm}$, $\lambda_2 = 700 \text{ nm} \Rightarrow a = 14.39$, $b = 8.22$, joten

$$\begin{aligned} \frac{B_V}{B_{\text{kok}}} &= \frac{15}{\pi^4} (f(8.22) - f(14.39)) \\ &= \frac{15}{\pi^4} (0.2187 - 0.0021) = 0.0334. \end{aligned}$$

Siis vain noin 3.3 % säteilystä on näkyvää valoa. Kaikki muu energia menee lämpönä ns. harakoille (semminkin, jos lamppu sattuu olemaan ulkosalla).

5.7 Tähten pinta-ala on $4\pi R^2$, joten sen luminositeetti on

$$\begin{aligned} L &= 4\pi R^2 \sigma T^4 \\ &= 4\pi (100 \times 6.96 \times 10^8)^2 \times 5.669 \times 10^{-8} \times 2500^4 \text{ W} \\ &= 1.35 \times 10^{29} \text{ W}. \end{aligned}$$

Tehtävän 5.6 nojalla 3.3% säteilystä on näkyvää valoa:

$$L_V = 0.033 \times 1.35 \times 10^{29} \text{ W} = 4.45 \times 10^{27} \text{ W}.$$

b) Vuontiheys 10 pc:n päässä on

$$\frac{L}{4\pi r^2} = \frac{1.35 \times 10^{29}}{4\pi (10 \times 3.0857 \times 10^{16})^2} = 1.1 \times 10^{-7} \text{ W m}^{-2}.$$

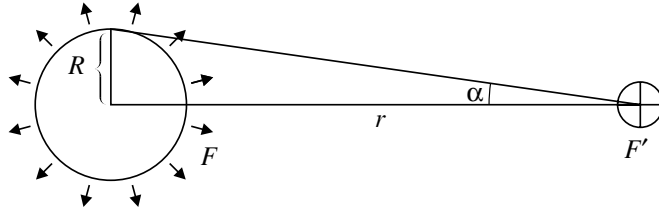


Lampun etäisyydelle r_{∞} saamme yhtälön

$$\frac{L_{\infty}}{4\pi r_{\infty}^2} = 1.1 \times 10^{-7} \text{ W m}^{-2}.$$

Kun lampun teho on 100 W, saadaan etäisyydeksi noin 8.4 kilometriä. Koska tähden ja lampun lämpötila on sama, on kummankin L_V/L_{kok} sama, joten saadaan sama tulos myös, jos käytetään visuaalialueen luminositeetteja.

5.8



Olkoon vuontiheys Auringon pinnalla $F = \sigma T_e^4$. Luminositeetti on tällöin $L = 4\pi R^2 \sigma T_e^4$ ja vuontiheys etäisyydellä r on

$$F' = \frac{L}{4\pi r^2} = \left(\frac{R}{r}\right)^2 \sigma T_e^4$$

\Rightarrow

$$T_e = \sqrt[4]{\frac{F'}{\sigma \alpha^2}},$$

missä $\alpha = R/r$ on kulma, jossa Auringon säde näkyy Maasta ($\alpha = 16' = 0.0047 \text{ rad}$). Sijoittamalla tiedot lämpötilan lausekkeeseen saadaan

$$T_e = \sqrt[4]{\frac{1390 \text{ W m}^{-2}}{5.67 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4} \times 0.0047^2}} \approx 5800 \text{ K}.$$

5.9

$$\begin{aligned} M_{\text{bol}} - M_{\text{bol},\odot} &= -2.5 \lg \frac{L}{L_{\odot}} = -2.5 \lg \frac{4\pi R^2 \sigma T_e^4}{4\pi R_{\odot}^2 \sigma T_{e,\text{odot}}^4} \\ &= -2.5 \lg \left(\frac{R}{R_{\odot}}\right)^2 \left(\frac{T_e}{T_{e,\text{odot}}}\right)^4, \end{aligned}$$

josta saadaan säteiden suhteeksi

$$\frac{R}{R_{\odot}} = \left(\frac{T_{e,\text{odot}}}{T_e}\right)^2 10^{-0.2(M_{\text{bol}} - M_{\text{bol},\odot})}.$$

a) ϵ Eridanin säde on

$$R = \left(\frac{5800}{4600}\right)^2 10^{-0.2(5.4-4.7)} R_{\odot} \approx 1.2 R_{\odot}.$$

b) Siriukselle joudumme ensin laskemaan bolometrisen magnitudin:

$$\begin{aligned} m_V - M_V &= 5 \lg \frac{r}{10 \text{ pc}} \\ \Rightarrow M_V &= m_V - 5 \lg \frac{r}{10 \text{ pc}} = -1.5 - 5 \lg \frac{2.67}{10} = 1.37 \\ M_{\text{bol}} &= M_V - BC = 1.37 - 0.5 = 0.87. \end{aligned}$$

Nyt voidaan laskea säde

$$R = \left(\frac{5800}{10000} \right)^2 10^{-0.2(0.87-4.7)} R_{\odot} \approx 2.0 R_{\odot}.$$

5.10 Olkoot tähtien magnitudit m_A ja m_B , luminositeetit L_A ja L_B sekä efektiiviset lämpötilat T_A ja T_B . Kummankin tähden säde on R . Lasketaan magnitudierotus lämpötilojen funktiona:

$$\begin{aligned} m_A - m_B &= -2.5 \lg \frac{L_A}{L_B} = -2.5 \lg \frac{4\pi R^2 \sigma T_A^4}{4\pi R^2 \sigma T_B^4} \\ &= -2.5 \lg \left(\frac{T_A}{T_B} \right)^4 = -10 \lg \frac{T_A}{T_B}. \end{aligned}$$

Tästä saadaan

$$T_B = T_A \times 10^{(m_A - m_B)/10} = 4350 \times 10^{(5.2 - 6.2)/10} \approx 3380 \text{ K}.$$

5.11 Jos havaittu vuontiheys aallonpituudella λ on F , kirkkauslämpötila saadaan yhtälöstä

$$\begin{aligned} F &= \alpha^2 \pi \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda k T_b} - 1} \\ \Rightarrow e^{hc/\lambda k T_b} &= \alpha^2 \pi \frac{2hc^2}{F \lambda^5} + 1 \\ \Rightarrow T_b &= \frac{hc/\lambda k}{\ln \left(\alpha^2 \pi \frac{2hc^2}{F \lambda^5} + 1 \right)}. \end{aligned}$$

Auringolle $\alpha = 16' = 0.0047 \text{ rad}$. Kun $\lambda = 300 \text{ nm}$, on $F = 0.59 \text{ W m}^{-2} \text{ nm}^{-1}$, joten $T_b = 1380 \text{ K}$. Alueella on paljon vahvoja absorptioviivoja, joten kirkkaus on pienempi kuin Auringon pinnan lämpötilassa olevalla mustalla kappaleella. Jos kirkkauslämpötila laskettaisiin kontinuumin avulla, saataisiin huomattavasti korkeampi arvo.

5.12 Oppikirjan yhtälöstä (5.32) saadaan

$$T_c = \frac{b}{(B - V) - a},$$

missä

$$b = 2.5 \frac{hc}{k} \left(\frac{1}{\lambda_B} - \frac{1}{\lambda_V} \right) \approx 7000 \text{ K}.$$

Toinen vakio määrätään ehdosta, että $B = V$ spektriluokan A0 tähdille, joiden lämpötila on noin 15000 K:

$$a = (B - V) - \frac{b}{T_c} = -\frac{7000}{15000} = 0.47.$$

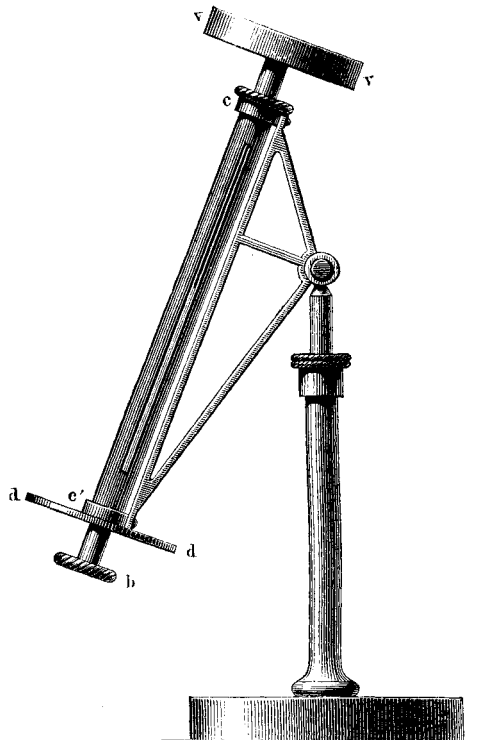
5.13 a) Kineettisen lämpötilan määritelmästä

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{3}{2}kT_k$$

saadaan nopeudeksi

$$\begin{aligned} v_{\text{rms}} &= \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3kT_k}{m}} \\ &= \sqrt{\frac{3 \times 1.38 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1} \times 10^6 \text{ K}}{9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}}} \\ &= 6.74 \times 10^6 \text{ m s}^{-1} \approx 6700 \text{ km s}^{-1}. \end{aligned}$$

b) Kun lämpötila on $25^\circ = 298 \text{ K}$, on nopeus $v_{\text{rms}} \approx 120 \text{ km s}^{-1}$.



6 Taivaanmekaniikka

6.1 Kiihtyvyys etäisyydellä r Maan keskipisteestä on

$$\begin{aligned} a &= \frac{GM_{\oplus}}{r^2} = \frac{6.67 \times 10^{-11} \times 5.98 \times 10^{24}}{((6400 + 350) \times 10^3)^2} \text{ m s}^{-2} \\ &= 8.75 \text{ m s}^{-2} \approx 0.9g. \end{aligned}$$

Ero maanpinnalla vallitsevaan vetovoimaan ei siis ole kovin tuntuva. Avaruusalus ja sen matkustaja ovat molemmat samanlaisessa vapaassa putousliikkeessä likimain samassa paikassa. Niinpä niiden välillä ei esiinny kiihtyvyyksiä, jotka pyrkisivät painamaan matkustajaa jotakin seinää vasten ja aiheuttaisivat kuvitelman jostakin voimasta. Tilanne ei riipu lainkaan aluksen radasta; se voi vaikka pudota suoraan kohti maapalloa. Keskipakoisvoimalla (jota ei ole olemassa) ei ole mitään tekemistä painottomuuden kanssa.

6.2 Voima on siis muotoa $\mathbf{F} = -f(\mathbf{r})\mathbf{e}_r$, missä f on täysin mielivaltaisen paikan skalaarifunktio $f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$. Impulssimomentti on $\mathbf{L} = m\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{L}} &= m(\dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}}) = m\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{r} \times (m\ddot{\mathbf{r}}) = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \\ &= -f(\mathbf{r})\mathbf{r} \times \mathbf{e}_r = 0. \end{aligned}$$

Koska \mathbf{L} :n aikaderivaatta häviää, \mathbf{L} :n täytyy olla vakiovektori.

6.3 Kiertoaika saadaan Keplerin kolmannelta laista

$$P = 2\pi a \sqrt{\frac{a}{G(M+m)}}.$$

Ratanopeus on

$$v = \frac{2\pi a}{P} = \sqrt{\frac{G(M+m)}{a}}.$$

Koska $\mathbf{r} \perp \mathbf{v}$, on

$$L = mav = m\sqrt{aG(M+m)}.$$

Kun $m \ll M$, on $L \approx m\sqrt{aGM}$, joten pienin L on planeetalla, jolle tulo m^2a on pienin. Pienimmät massat ovat Plutolla ja Merkuriuksella. Koska Merkurius on myös lähinnä Aurinkoa, voi ainoastaan Pluto vielä pienemmällä massallaan horjuttaa Merkuriuksen



asemaa pienimmän impulssimomentin omaavana planeettana.

$$\begin{aligned} \text{Merkurius } m^2 a &= \frac{M_{\odot}^2}{5\,873\,000^2} 0.387 \text{ AU} \\ &= 1.1 \times 10^{-14} M_{\odot}^2 \text{ AU}, \\ \text{Pluto } m^2 a &= \frac{M_{\odot}^2}{164\,500\,000^2} 39.75 \text{ AU} \\ &= 1.5 \times 10^{-15} M_{\odot}^2 \text{ AU}, \end{aligned}$$

Pienin rataimpulssimomentti on siis Plutolla.

- 6.4 Jos Saturnusta pidetään jäykästi pyörivänä kappaleena, sen impulssimomentti on $L = I\omega$, missä ω on kulmanopeus ja I hitausmomentti $I = \int s^2 \rho dV$. Tässä s on etäisyys pyörimisakselista ja ρ tiheys. Integrointi ulotetaan koko kappaleen yli. Homogeeniselle pallolle saadaan

$$\begin{aligned} I &= \rho \int_0^R dr \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi r^2 \cos^2 \theta r^2 \cos \theta \\ &= 2\pi\rho \int_0^R dr r^4 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3 \theta d\theta \\ &= 2\pi\rho \left(\int_0^R \frac{r^5}{5} \right) \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{3} \sin \theta (\cos^2 \theta + 2) \right) \\ &= 2\pi\rho \frac{R^5}{5} \frac{4}{3} = \frac{8}{15} \pi \rho R^5 = \frac{2}{5} M R^2. \end{aligned}$$

Saturnuksen impulssimomentti on siis

$$L_S = \frac{2}{5} M_S R_S^2 \omega_S.$$

Todellisuudessa tiheys kasvaa keskustaa kohti, jolloin impulssimomentti on tässä laskettua pienempi.

Renkaiden impulssimomentti saadaan laskemalla yhteen kaikkien rengaspartikkelien impulssimomentit:

$$L_R = \int \mathbf{r} \times \mathbf{v} \rho dV.$$

Koska $\mathbf{r} \perp \mathbf{v}$, on

$$L_R = \rho h \int_{R_1}^{R_2} dr \int_0^{2\pi} r d\varphi r v(r),$$

missä h on renkaiden paksuus ja $v(r)$ nopeus etäisyydellä r :
 $v(r) = \sqrt{GM_S/r}$

$$\begin{aligned} L_R &= \rho h \sqrt{GM_S} \int_{R_1}^{R_2} r^{3/2} dr \int_0^{2\pi} d\varphi \\ &= 2\pi \rho h \sqrt{GM_S} \frac{2}{5} (R_2^{5/2} - R_1^{5/2}). \end{aligned}$$

Tiheys on nyt

$$\rho = \frac{M_R}{V} = \frac{M_R}{\pi h(R_2^2 - R_1^2)},$$

joten

$$L_R = \frac{4}{5} \sqrt{GM_S M_R} \frac{R_2^{5/2} - R_1^{5/2}}{R_2^2 - R_1^2}.$$

Siispä

$$\frac{L_R}{L_S} = 2 \frac{G}{M_S} \frac{M_R}{R_S^2 \omega_S} \frac{R_2^{5/2} - R_1^{5/2}}{R_2^2 - R_1^2} \approx 9.2 \times 10^{-16}.$$

- 6.5 Nopeuksien suhde saadaan helpoimmin impulssimomentin säilymislaista: perihelissä ja aphelissa nopeusvektori on kohtisuorassa paikkavektoria vastaan, joten $L = r_a v_a = r_p v_p \Rightarrow$

$$\frac{v_a}{v_p} = \frac{r_p}{r_a} = \frac{a(1-e)}{a(1+e)} = \frac{1-e}{1+e}.$$

Maapallolle $e = 0.017$, joten $v_a/v_p = 0.97$.

- 6.6 $r_p = a(1-e)$, $r_a = a(1+e)$
 $\Rightarrow a = \frac{1}{2}(r_p + r_a) = 1.4581 \text{ AU}.$

$$v = \sqrt{\mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)} = \sqrt{4\pi^2 \left(\frac{2}{1.524} - \frac{1}{1.4581} \right)}$$

$$= 4.9733 \text{ AU a}^{-1} \approx 23.6 \text{ km s}^{-1}.$$

- 6.7 a) Kun yksikköinä käytetään maapallon massaa M_\oplus , minuuttia ja kilometriä, on $G = 1.453 \times 10^9 \text{ km}^3 \text{ min}^{-2} M_\oplus^{-1}$. Kiertoaika on $1\frac{1}{2}$ tuntia eli 90 minuuttia. Radan säde voidaan ratkaista Keplerin kolmannelta laista:

$$P^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{G(M_\oplus + m_{\text{satelliitti}})} \approx \frac{4\pi^2 a^3}{GM_\oplus}$$

\Rightarrow

$$a = \sqrt[3]{\frac{P^2 GM_\oplus}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{90^2 \times 1.453 \times 10^9 \times 1}{4\pi^2}} = 6680 \text{ km}.$$

Korkeus maanpinnasta on ekvaattorilla $6680 - 6380 = 300 \text{ km}$ ja navoilla $6680 - 6360 = 320 \text{ km}$.

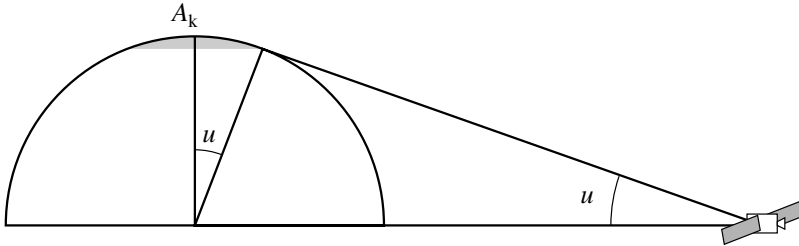
b) Maapallo pyörähtää $1\frac{1}{2}$ tunnissa ($1 \text{ h } 30 \text{ min} / 23 \text{ h } 56 \text{ min}$) $\times 360^\circ = 22.6^\circ$. Seuraavalla kierroksella satelliitti kulkee 22.6° lännempää eli jostain Shetlandin ja Norjan rannikon välistä öljynpora-lauttoja vakoillen.

c) Koska $24/1\frac{1}{2}$ on kokonaisluku, on satelliitti vuorokauden kulluttua taas samalla leveysasteella. Maapallo on 24 tunnissa pyörähtänyt hieman enemmän kuin yhden kierroksen, joten satelliitin rata kulkee hivenen lännempää. Ero on noin 4 minuuttia aikamitoissa, mikä vastaa yhtä astetta.

- 6.8 Kiertoaajan on oltava sama kuin maapallon sideerinen pyörähdysaika $P = 1436$ min, joten

$$a = \sqrt[3]{\frac{P^2 GM}{4\pi^2}} = 42\,339 \text{ km} = 6.64R_{\oplus}.$$

Satelliitin ratataso kulkee aina maapallon keskipisteen kautta. Geostationaarisen satelliitin täytyy olla ekvaattorin tasossa. (Eli rata ole ekvaattorin tasossa, vaikka kiertoaika onkin oikea, satelliitti näyttää maanpinnalta katsottuna vuorokauden kuluessa vaeltelevan edestakaisin pohjois-etelä-suunnassa.) Napojen ympärille jää kalotit, joita ei voi nähdä ekvaattorin tasossa olevasta satelliitista.



Kuvasta nähdään, että

$$\sin u = \frac{6360 \text{ km}}{42\,339 \text{ km}} = 0.1502 \Rightarrow u = 8.6^\circ.$$

Alueet leveyspiirin 81.4° pohjoispuolella ja leveyspiirin -81.4° eteläpuolella jäävät siis väistämättä katveeseen. Ikävää alueellista eriarvoisuutta.

Yhden napakalotin ala on

$$\begin{aligned} A_k &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^u d\theta r^2 \sin \theta \\ &= 2\pi r^2 (1 - \cos u) = 2\pi r^2 \text{vers } u, \end{aligned}$$

joten

$$\frac{A_{\text{katve}}}{A_{\oplus}} = \frac{2A_k}{4\pi r^2} = \text{vers } u = \text{vers } 8.6^\circ = 0.011.$$

- 6.9 Sijoitetaan Keplerin kolmannessa laissa $P^2 \approx 4\pi^2 a^3 / GM_{\odot}$ Auringon massan paikalle $M_{\odot} = \frac{4}{3}\pi R_{\odot}^3 \rho$ ja ratkaistaan tiheys:

$$\rho = \frac{3\pi}{GP^2} \left(\frac{a}{R_{\odot}} \right)^3 = \frac{3\pi}{GP^2 \alpha^3},$$

missä α on kulma, jossa Auringon säde näkyy Maasta: $\alpha = 16' = 0.00465$ rad. P on sideerisen vuoden pituus $P = 365.265 \text{ d} = 3.16 \times 10^7 \text{ s}$.

$$\rho = \frac{3\pi}{6.67 \times 10^{-11} (3.16 \times 10^7)^2 0.00465^3} \text{ kg m}^{-3} \approx 1400 \text{ kg m}^{-3}.$$

- 6.10 Pakonopeus on $v_e = \sqrt{2\mu/R} \approx \sqrt{2GM/R}$, missä M on taivaan-kappaleen massa ja R etäisyys keskipisteestä. Oletetaan, että matkaan saatettava esine on paljon pienempi kuin itse taivaan-kappale.

	M [kg]	R [m]	v_e [km/s]
Maa	5.98×10^{24}	6.38×10^6	11.2
Kuu	7.35×10^{22}	1.74×10^6	2.4
Jupiter	1.92×10^{27}	7.10×10^7	60
Aurinko	1.99×10^{30}	6.96×10^8	618

- 6.11 Lähtönopeus on $v_0 = v_e/\sqrt{2} = \sqrt{GM/R}$. Jos kivi nousee suoraan ylöspäin korkeudelle x pinnasta, saadaan energian säilymislaista

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GMm}{R} = -\frac{GMm}{R+x} \\ \Rightarrow \frac{GMm}{2R} - \frac{GMm}{R} &= -\frac{GMm}{R+x} \\ \Rightarrow x &= R. \end{aligned}$$

Kivi nousee siis planeetan säteen päähän pinnasta. Vaakasuoraan heitetessä kivi jää ympyräradalle kiertämään planeettaa (ja määjättää aikanaan kivenheittäjän niskaan), sillä $v_e/\sqrt{2}$ on juuri ympyräradan ratanopeus.

- 6.12 Apogeumissa etäisyys Maan keskipisteestä on $r_a = a(1+e)$ ja nopeus v_a :

$$v_a^2 = GM \left(\frac{2}{r_a} - \frac{1}{a} \right) = GM \frac{1-e}{r_a},$$

josta

$$\begin{aligned} e &= 1 - \frac{r_a v_a^2}{GM} = 1 - \frac{6.37 \times 10^6 \times 1}{6.67 \times 10^{-11} \times 5.97 \times 10^{24}} \\ &= 1 - 1.6 \times 10^{-8} = 0.999999984. \end{aligned}$$

Eksentrisyys on siis kohtalaisen lähellä ykköstä, joten se koulussa opittu paraabelirata-approksimaatio heittoliikkeelle ei ole kovin virheellinen, kunhan lähtönopeus ei ole järkevästi suuri.

Radan isoakselin puolikas on

$$a = \frac{r_a}{1+e} \approx \frac{r_a}{2} = 3.19 \times 10^6 \text{ m} = 3190 \text{ km}.$$

Perigeumetäisyys on

$$r_p = a(1-e) = 3.19 \times 10^6 \times 1.6 \times 10^{-8} \text{ m} \approx 5 \text{ cm}.$$

Nopeus perigeumissa on

$$\begin{aligned} v_p &= \sqrt{\frac{GM}{a} \frac{1+e}{1-e}} = \frac{1+e}{1-e} v_a \approx \frac{2v_a}{1-e} \\ &= 1.25 \times 10^8 \text{ m s}^{-1} = 125\,000 \text{ km s}^{-1}. \end{aligned}$$

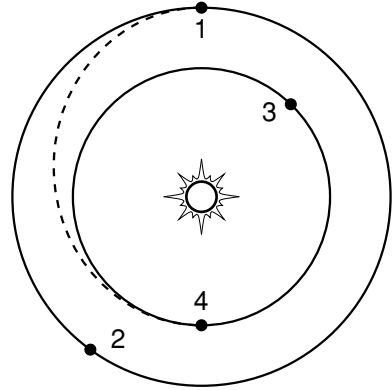
On tämä vielä valonnopeutta pienempi, mutta relativistiset korjaukset alkavat kyllä olla jo tarpeen.



Jos lähtönopeus on 800 m s^{-1} , on $e = 0.9898$, joten radan käsittelemisen paraabelina on jo vähän kyseenalaista.

6.13 Kuvan numerot tarkoittavat seuraavia tapahtumia:

- 1 Maan paikka luotaimen lähtiessä
- 2 Maan paikka luotaimen saapuessa
- 3 Venuksen paikka luotaimen lähtiessä
- 4 Venuksen paikka luotaimen saapuessa



a) Luotaimen radan isoakselin puolikas on $a = \frac{1}{2}(1 + 0.72) \text{ AU} = 0.86 \text{ AU}$. Aphelietäisyys on $1 = a(1 + e)$, josta $e = 0.163$. Kiertoaika on $P = a^{3/2} = 0.80$ vuotta. Lentoaika on puolet tästä eli 0.40 vuotta. Koska Venuksen kiertoaika on 0.615 a , Venus liikkuu 0.40 vuodessa 234° (kuvasa pisteestä 3 pisteeseen 4). Maa puolestaan liikkuu 144° ($1 \rightarrow 2$). Lähtöhetkellä Maa on siis 54° edellä Venusta ja saapumishetkellä Venus on 36° Maan edellä.

b) Longitudien erotus kasvaa nopeudella

$$n_{\text{Venus}} - n_{\oplus} = \frac{360^\circ}{0.615 \text{ a}} - \frac{360^\circ}{1 \text{ a}} = 225.37^\circ \text{ a}^{-1}.$$

Yläkonjunktiossa longitudierotus on 180° , joten Venuksen on otettava Maata kiinni 126° , mihin kuluu aikaa $126/225.37$ vuotta $= 0.559 \text{ a} = 204 \text{ d}$. Yläkonjunktioita 7.4.1981 vastaava juliaaninen päivämäärä on $2\,444\,702$. Lähtöikkuna on $7.4.1981 + 204 \text{ d} = \text{JD } 2\,444\,906 = 28.10.1981$. Lähtöikkunat toistuvat synodisen jakson välein, joten seuraavat mahdolliset lähetysajat ovat $28.10.1981 + k \cdot 584 \text{ d}$, missä k on jokin kokonaisluku.

c) Nopeus perihelissä on

$$v_p = \sqrt{\frac{GM}{a} \frac{1+e}{1-e}} = 37 \text{ km s}^{-1}$$

ja aphelissä

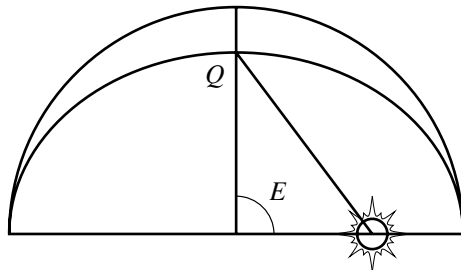
$$v_a = \sqrt{\frac{GM}{a} \frac{1-e}{1+e}} = 27 \text{ km s}^{-1}.$$

Maapallon ratanopeus puolestaan on 30 km s^{-1} ja Venuksen 35 km s^{-1} . Luotaimen siirtämiseksi ellipsiradalle laukaisun jälkeen tarvitaan siis 3 km s^{-1} nopeuden muutos (ja lisäksi on tietenkin päästävä pois maapallolta, mihin tarvitaan nopeutta 11.2 km s^{-1}). Venuksen radalle luotain saadaan jäämään tekemällä 2 km s^{-1} suuruinen nopeuden muutos. Vertaamalla luotaimen nopeuksia planeettojen nopeuksiin huomaamme, että molemmissa operaatioissa on kysymys nopeuden pienentämisestä. Ensimmäinen jarrutus saa luotaimen 'putoamaan' lähemmäs Aurinkoa ellipsirataa

pitkin. Toinen jarrutus estää luotainta palaamasta takaisin Maan radalle ellipsis toista puoliskoa pitkin.

Voidaan osoittaa, että käytettäessä tällaista molempien planeettojen ratoja sivuavaa elliptistä siirtorataa päästään pienimmillä nopeuden muutoksilla ja siis pienimmällä energian käytöllä.

6.14



Pisteessä Q eksentrisen anomalia on $E = \pi/2$, joten keskianomalia on

$$M = E - e \sin E = \frac{\pi}{2} - e \sin \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - e.$$

Koska M kasvaa tasaisesti ajan mukana, on aina $\Delta t/P = \Delta M/2\pi$, joten radan vasemmalla puoliskolla M kasvaa $-(\pi/2 - e) \rightarrow (\pi/2 - e)$. Niin ollen kappale viettää siellä ajastaan osan

$$\frac{\Delta M}{2\pi} = 2 \frac{\frac{1}{2}\pi - e}{2\pi} = \frac{1}{2} - \frac{e}{\pi}.$$

Oikealla puoliskolla kuluu sitten loput ajasta eli $1 - (\frac{1}{2} - e/\pi) = \frac{1}{2} + e/\pi$. Halley'n komeetalle $e = 0.967$, josta $\frac{1}{2} + e/\pi = 0.808$. Komeetta viettää elämästään yli neljä viidennestä ratansa kaukaisemmalla puoliskolla.

6.15 Tulos riippuu hieman siitä, millaista vuotta tarkoitetaan. Oletetaan, että kyseessä on sideerinen vuosi, $P = 365.256$ d, jolloin

$$\frac{t - \tau}{P} = \frac{1}{4} \Rightarrow M = \frac{2\pi}{P}(t - \tau) = \frac{\pi}{2} = 90^\circ.$$

Eksentrisen anomalia ratkaistaan Keplerin yhtälöstä $E - e \sin E = M$. Arvataan sopiva alkuarvo, esim. $E_0 = M = \pi/2 \approx 1.57080$. Tätä ruvetaan sitten parantelemaan iteroitsemalla:

$$\begin{aligned} E_1 &= M + e \sin E_0 = 1.57080 + 0.0167 \sin 1.57080 = 1.58750, \\ E_2 &= M + e \sin E_1 = 1.58750. \end{aligned}$$

Tällä tarkkuudella E_1 ja E_2 ovat jo samoja, joten voimme lopettaa iteroitsemisen. Ratkaisu on $E = 1.58750 = 90.96^\circ = 90^\circ 57'$. Luonnollinen anomalia lasketaan muunnoskaavoista:

$$\begin{aligned} \cos f &= \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E} = -0.03339, \\ \sin f &= \sqrt{1 - e^2} \frac{\sin E}{1 - e \cos E} = 0.99944. \end{aligned}$$

Näistä saadaan $f = 91.91^\circ = 91^\circ 55'$.

- 6.16 Marsin kiertoaika on $P = 1.881$ a, joten keskianomalia vuoden kuluttua perihelistä on

$$M = \frac{t - \tau}{P} 2\pi = \frac{2\pi}{1.881} = 3.34 \text{ rad.}$$

Sitten vain ratkaistaan Keplerin yhtälöstä eksentrisen anomalia. Koulutuksen tässä vaiheessa iterointi ei enää tuottane ongelmia. Tuloksena on $E = 3.324 \text{ rad} = 190.4^\circ$. Isoakselin puolikas on $a = 1.524 \text{ AU}$ ja pikkuakselin puolikas $b = a\sqrt{1 - e^2} = 1.517 \text{ AU}$. Paikkavektori on

$$\mathbf{r} = a(\cos E - e)\hat{\mathbf{i}} + b \sin E \hat{\mathbf{j}} = -1.641 \hat{\mathbf{i}} - 0.275 \hat{\mathbf{j}}.$$

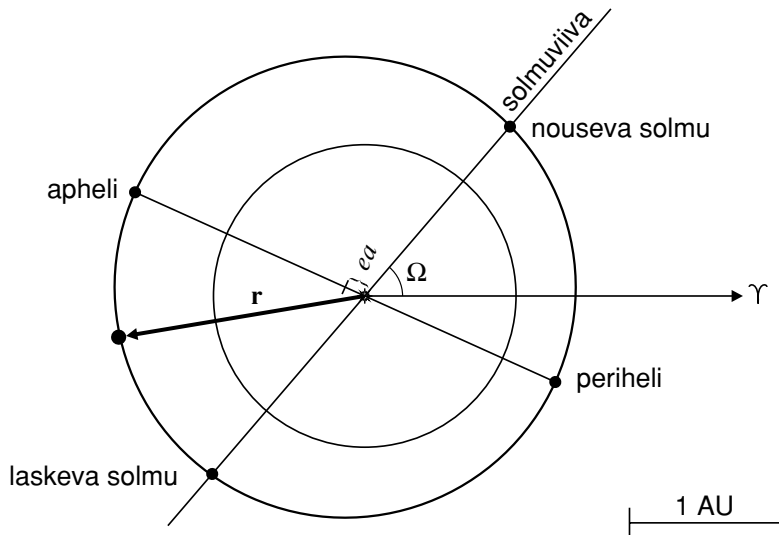
Etäisyys on

$$r = a(1 - e \cos E) = 1.663 \text{ AU.}$$

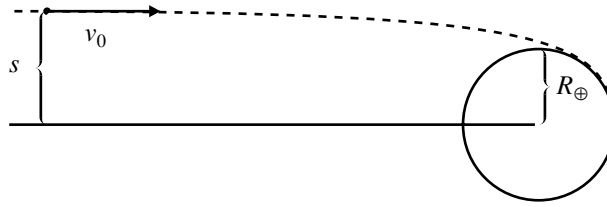
Luonnollinen anomalia saadaan paikkavektorin komponenttien avulla:

$$f = \arctan \frac{-0.275}{-1.641} = 189.5^\circ.$$

Muodoltaan rata poikkeaa vain vähän ympyrästä, joten se voidaan aivan hyvin piirtää ympyränä. Keskipiste ei kuitenkaan ole Auringsa, vaan matkan $ea = 0.093 \times 1.524 \text{ AU} = 0.142 \text{ AU}$ päässä.



- 6.17 Kuva esittää rajatapausta, jossa meteoroidi osuu maapalloon pinnan suuntaisesti. Jos s on suurempi, kiertää meteoroidi maapallon törmäämättä siihen. Jos taas s on pienempi, törmäys tapahtuu aikaisemmin ja jyrkemmässä kulmassa.



Olkoon nopeus törmäyshetkellä v . Rajatapauksessa saamme impulssimomentin säilymisestä yhtälön $L = mv_0s = mvR_{\oplus}$ ja energian säilymisestä $E = \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 - GmM_{\oplus}/R_{\oplus}$. Näitä hyödyntämällä saamme helposti

$$s = R_{\oplus} \frac{v}{v_0} = R_{\oplus} \frac{\sqrt{v_0^2 + 2GM_{\oplus}/R_{\oplus}}}{v_0} = \sqrt{R_{\oplus}^2 + 2GM_{\oplus}R_{\oplus}/v_0^2}.$$

- 6.18 Koska nopeus $v > 0$ kappaleen ollessa äärettömän kaukana, rata on hyperbeli. Energiaintegraali on

$$h = \frac{1}{2}v^2 - \frac{\mu}{r} = \frac{1}{2}(5 \text{ m s}^{-1})^2 = 12.5 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}.$$

Tästä saadaan isoakselin puolikkaaksi

$$a = \frac{\mu}{2h} \approx \frac{GM_{\odot}}{2h} = 5.3 \times 10^{18} \text{ m} = 3.55 \times 10^7 \text{ AU}.$$

Impulssimomentti on

$$k = |\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}| = 1 \text{ AU} \times 5 \text{ m s}^{-1} = 7.48 \times 10^{11} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}.$$

Eksentrisyys saadaan yhtälöstä $\mu^2(e^2 - 1) = 2hk^2$:

$$\begin{aligned} e^2 &= 1 + \frac{2hk^2}{\mu^2} = 1 + \frac{2 \times 12.5 \times (7.48 \times 10^{11})^2}{(6.67 \times 10^{-11} \times 1.989 \times 10^{30})^2} \\ &= 1 + 7.947 \times 10^{-16} \\ &\Rightarrow \\ e &= \sqrt{1 + 7.947 \times 10^{-16}} \approx 1 + \frac{1}{2} \times 7.947 \times 10^{-16} \\ &= 1 + 3.97 \times 10^{-16}. \end{aligned}$$

(Tässä on tyypillinen esimerkki tilanteesta, joka ei ole kunnolla hallittavissa kymmenen numeron tarkkuudella laskevan laskukoneen avulla. Tällöin Taylor-sarja voi usein osoittautua pelastukseksi, kuten tässäkin. Mainittakoon tehtävän historiallisesta taustasta, että keksimme sen ilkeyksissämme juuri laskimiin liikaa turvautuvien opiskelijoiden riesaksi. Inspiraation antoi muuan opiskelija, joka ilmoitti syyksi laskemattomiin tehtäviinsä sen, että laskimesta olivat patterit loppuneet.)

Perihelietäisyys on

$$\begin{aligned} r_p &= a(e - 1) = 3.55 \times 10^7 \times 3.97 \times 10^{-16} \text{ AU} \\ &= 1.409 \times 10^{-8} \text{ AU} = 2.1 \text{ km}. \end{aligned}$$

Komeettaparka törmää siis Aurinkoon.

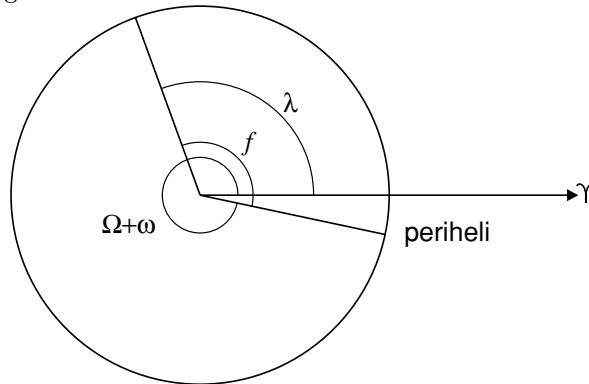
- 6.19 Näemme taulukosta, että 1.12.1985 keskianomalia on $M = 165.02920^\circ$. Keskiliike on $0.17898617^\circ \text{d}^{-1}$, joten 5.1.1985 keskianomalia on

$$\begin{aligned} M &= 165.02920^\circ - 330 \text{ d} \times 0.17898617^\circ \text{d}^{-1} \\ &= 105.9638^\circ = 1.849417 \text{ rad.} \end{aligned}$$

Radan eksentrisyys on $e = 0.1092830$, joten Keplerin yhtälön ratkaisuksi saamme $E = 1.950900 = 111.7783^\circ$. Edelleen $\cos f = -0.461584$, $\sin f = 0.887096$, joten $f = 117.4894^\circ$. Etäisyys on $r = a(1 - e \cos E) = 3.244772 \text{ AU}$. Nyt tiedämmekin paikan rata-tasoon liittyvässä koordinaatistossa. Jotta sitä voitaisiin verrata maapallon paikkaan, joudumme laskemaan aluksi esimerkiksi heliosentriset ekliptikaaliset koordinaatit:

$$\begin{aligned} \sin \beta &= \sin \iota \sin(\omega + f) = 0.187056 \\ \tan(\lambda - \Omega) &= \cos \iota \tan(\omega + f) = -1.601204 \end{aligned}$$

Leveys on selvästi $\beta = 10.7810^\circ$, mutta pituus voi olla joko $\lambda = 347.71566^\circ - 58.01398^\circ = 289.7017^\circ$ tai $347.71566^\circ + 120.9860^\circ = 109.7017^\circ$. Oikean ratkaisun valitsemiseksi kannattaa esimerkiksi piirustaa tilanteesta jonkinlainen kuva, josta oikea vaihtoehto yleensä selviää. Luonnollisen anomalian avulla tiedämme, missä planeetan pitäisi olla. Tässä tapauksessa näemme, että 109.7° on oikea longitudi.



Nyt saamme ekliptikaaliset suorakulmaiset koordinaatit:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \beta \cos \lambda = -1.074580 \text{ AU,} \\ y &= r \cos \beta \sin \lambda = 3.000905 \text{ AU,} \\ z &= r \sin \beta = 0.606953 \text{ AU.} \end{aligned}$$

Ekvatoriaaliset koordinaatit saadaan näistä kiertämällä x -akselin ympäri ekliptikan kaltevuuden $\varepsilon = 23.44^\circ$ verran:

$$\begin{aligned} x' &= x = -1.074580 \text{ AU,} \\ y' &= y \cos \varepsilon - z \sin \varepsilon = 2.511785 \text{ AU,} \\ z' &= y \sin \varepsilon + z \cos \varepsilon = 1.750646 \text{ AU.} \end{aligned}$$

Tarkistuksen vuoksi kannattaa laskea etäisyys $\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$, jonka pitäisi tietenkin olla sama kuin aikaisemmin saatu etäisyys. Nyt sitten vain vähennetään maapallon paikka, jolloin saadaan geosentriset koordinaatit. Tehtävään liittyvässä taulukossa annetut koordinaatit ovat Auringon geosentrisiä paikkoja, joista saadaan Maan heliosentriset paikat etumerkkiä vaihtamalla:

$$X = -1.074580 + 0.2397399 = -0.834840 \text{ AU},$$

$$Y = 2.511785 - 0.8748503 = 1.636935 \text{ AU},$$

$$Z = 1.750646 + 0.3793318 = 1.371314 \text{ AU}.$$

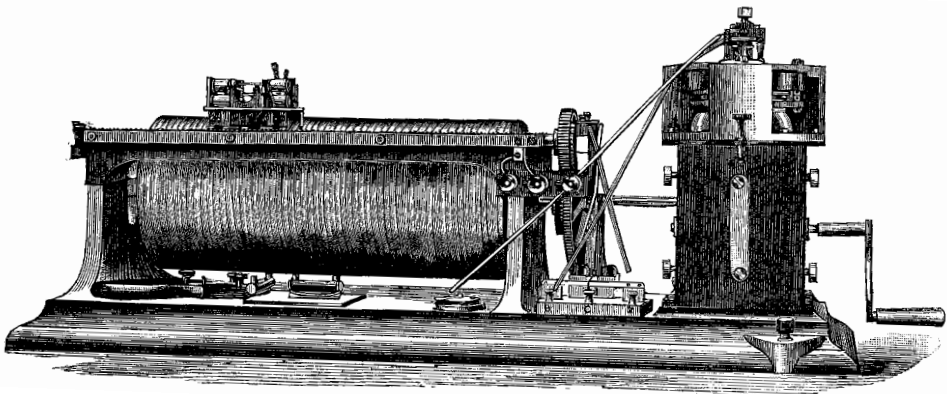
Ja nyt sitten, vihdoinkin

$$\alpha = \arctan \frac{Y}{X} = 117.02^\circ = 7.801 \text{ h} = 7 \text{ h} 48.01 \text{ min},$$

$$\delta = \arctan \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2}} = 36.73^\circ = 36^\circ 44'.$$

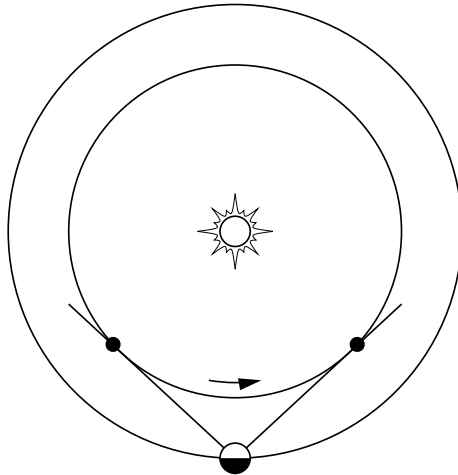
Verrattuumme näitä julkaistuihin efemerideihin voimmekin itseemme tyytyväisinä lähteä hakemaan oluen jääkaapista.

1984/85	α_{1950}	δ_{1950}	M r Bap. Δ
1524 Joensuu		16^m3	1980
XII 6	8 10.6 5.3	+35 22 ₊₃₃	106 ^o 1
16	8 05.3 7.7	+35 55 ₊₂₉	3.245
26	7 57.6 9.5	+36 24 ₊₂₀	
I 5	7 48.1 10.3	+36 44 ₊₇	-25'
15	7 37.8 10.1	+36 51 ₋₈	+6 ^m 1
25	7 27.7 8.8	+36 43 ₋₂₃	-4'1
II 4	7 18.9 6.6	+36 20 ₋₃₅	
14	7 12.3	+35 45	2.293



7 Aurinkokunta

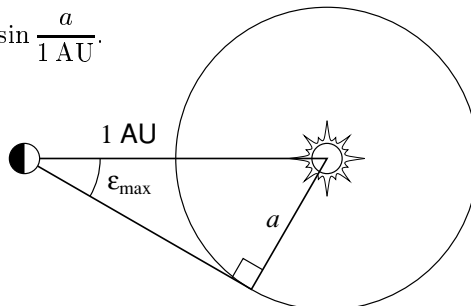
- 7.1 Suurimmassa itäisessä elongaatiossa Venus näkyy Maasta katsoen Auringon itäpuolella eli laskee myöhemmin kuin Aurinko. Planeetta näkyy siis "iltatähtenä". Kuvassa tilannetta tarkastellaan ekliptikan pohjoisnavalta.



Itäisestä elongaatiosta Venus siirtyy kohti alakonjunktia (liike tapahtuu vastapäivään). Piirroksesta havaitaan selvästi, että matka itäisestä elongaatiosta suurimpaan läntiseen on lyhyempi kuin läntisestä itäiseen. Niinpä muutos iltatähtestä aamutähteksi tapahtuu paljon nopeammin kuin päinvastaiseen suuntaan. Tämän voi todeta varsin helposti vilkaisemalla vaikka almanakkaa (tai mieluummin tekemällä ihan oikeita havaintoja Venuksen liikkeistä).

- 7.2 Oletetaan planeettojen radat ympyröiksi. Ulkoplaneetoille, siis myös Marsille, elongaatio voi saada mitä tahansa arvoja väliltä $\varepsilon \in [0^\circ, 180^\circ]$. Sisäplaneetan suurin elongaatio saadaan suoraan kuvion suorakulmaisesta kolmiosta

$$\varepsilon_{\max} = \arcsin \frac{a}{1 \text{ AU}}.$$



Merkuriukselle ja Venukselle saadaan seuraavat suurimman elongaation arvot:

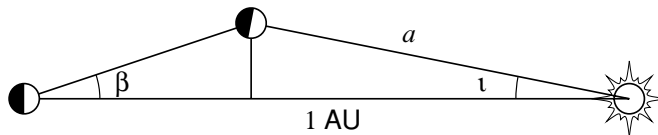
$$\begin{array}{ll} \text{Merkurius} & a = 0.387 \text{ AU} \quad \varepsilon_{\max} = 23^\circ \\ \text{Venus} & a = 0.723 \text{ AU} \quad \varepsilon_{\max} = 46^\circ \end{array}$$

Todellisuudessa ratojen eksentrisyydet voivat hieman vaikuttaa tulokseen, koska sekä Maan että planeetan etäisyys Auringosta vaihtelee.

Planeettojen näkymisajat voi karkeasti arvioida seuraavalla tavalla: Koska tähtitaivas pyörähtää tunnissa 15° , menee Merkuriukselta 23° mittaisen kaaren kulkemiseen aikaa $23/15 \text{ h} = 1 \text{ h } 30 \text{ min}$ ja vastaavasti Venukselta $46/15 \text{ h} = 3 \text{ h } 5 \text{ min}$. Mars näkyy kauimmin opposition aikana, jolloin se nousee Auringon laskiessa ja laskee Auringon noustessa eli on koko yön näkyvillä. Todelliset näkymisajat voivat poiketa edellä lasketuista melkoisestikin juuri deklinaation vaikutuksen takia. Esimerkiksi 1987 Mars pysytteli Utsjoelta nähtynä nelisen kuukautta yhtä päätä taivaanrannan alapuolella.

- 7.3 a) Venuksen suurin mahdollinen geosentrisen leveyden itseisarvo alakonjunktiossa havaitaan, kun Venus on 90° päässä ratansa nousevasta tai laskevasta solmusta. Kun radat oletetaan ympyröiksi, saadaan oheisen kuvan merkinnöin

$$\begin{aligned} \tan \beta &= \frac{a \sin t}{1 - a \cos t} = \frac{0.723 \sin 3.39^\circ}{1 - 0.723 \cos 3.39^\circ} = 0.154 \\ \Rightarrow \beta &= 8.73^\circ. \end{aligned}$$



b) Venuksen radan nousevan solmun pituus on $\Omega = 77^\circ$. Suurin (pienin) geosentrisen leveys havaitaan, kun Maa on 90° päässä Venuksen radan nousevan solmun suunnasta. Koska Maa liikkuu noin asteen vuorokaudessa, sattuvat Venuksen suurimmat tai pienimmät geosentrisen leveyden arvot noin 13 vuorokautta ennen kevätpäivän- tai syyspäiväntasausta ($180^\circ \pm (77^\circ + 90^\circ) = \pm 13^\circ$), ts. 8.3. ja 10.9. tienoilla.

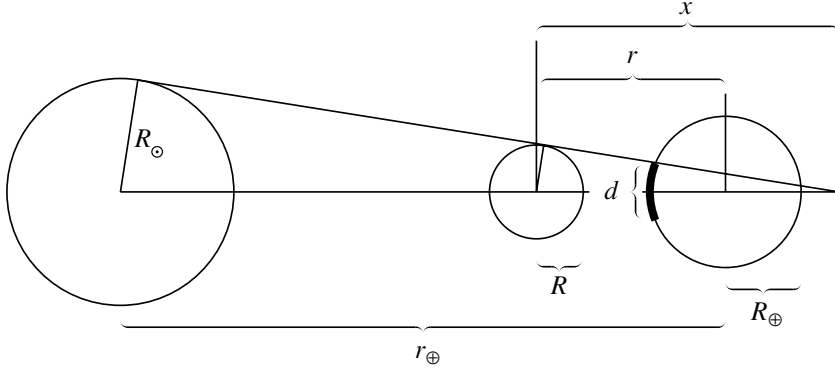
c) Ylikulkupäivinä Venus näkyy ratansa nousevan tai laskevan solmun suunnassa. Solmujen heliosentriset pituudet ovat $\Omega = 77^\circ$ ja $\Omega + 180^\circ = 257^\circ$ ja vastaavat ajankohdat ± 3 kuukautta b-kohdan tuloksista eli noin 8.6. (laskeva solmu) ja 10.12. (nouseva solmu).

- 7.4 Lasketaan aluksi Kuun varjon halkaisija d Maan pinnalla. Olkoon x varjon pituus, r Kuun keskipisteen etäisyys Maan keskipisteestä, r_\oplus Maan etäisyys Auringosta ja R_\odot , R_\oplus ja R Auringon, Maan ja Kuun säteet. Kuvan yhdenmuotoisista kolmioista saadaan

$$\frac{R_\odot}{r_\oplus - r + x} = \frac{R}{x} = \frac{d/2}{x - r + R_\oplus}.$$

Tästä saamme kaksi yhtälöä, joissa tuntemattomina ovat x ja d :

$$\begin{aligned} xR_{\odot} &= r_{\oplus}R - rR + xR, \\ \frac{1}{2}xd &= xR - rR + RR_{\odot}. \end{aligned}$$



Näistä voidaankin ratkaista d :

$$d = 2 \left(R - \frac{(R_{\odot} - R)(r - R_{\oplus})}{r_{\oplus} - r} \right).$$

a) Jotta pimennys ylipäättään voisi näkyä täydellisenä, varjon halkaisijan d on oltava positiivinen. Varjo on pisimmillään Maan ollessa aphelissä (r_{\oplus} suurimmillaan, $r_{\oplus, \text{apheli}} = 1.521 \times 10^8$ km). Kuun apogeumetäisyys on $r = 384\,400(1 + 0.055)$ km = 405 500 km. Sijoittamalla vielä Auringon, Maan ja Kuun säteiden arvot $R_{\odot} = 696\,000$ km, $R_{\oplus} = 6378$ km, $R = 1738$ km saadaan

$$\begin{aligned} d &= 2 \left(1738 - \frac{(696\,000 - 1738)(405\,500 - 6378)}{1.521 \times 10^8 - 405\,500} \right) \text{ km} \\ &= -177 \text{ km}. \end{aligned}$$

Varjo ei siis ulotu Maahan saakka, ja pimennys näkyy vain rengasmaisena.

b) Kun Kuu on keskietäisyydellään, saadaan varjon halkaisijaksi $d = 16$ km. Täydellinen pimennys on siis mahdollista nähdä, tosin vain hyvin kapealla vyöhykkeellä.

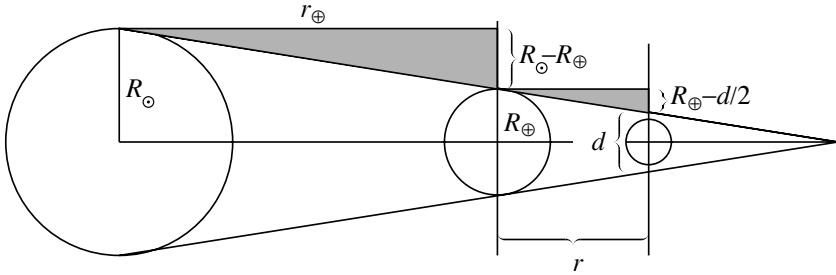
c) Lyhimmillään Kuun varjo on Maan ollessa perihelissä ($r_{\oplus} = 1.471 \times 10^8$ km). Jos Kuu on samalla perigeumissa ($r = 363\,000$ km), varjon halkaisija on $d = 101$ km eli aina positiivinen. Kuun ollessa pimennyksen sattuessa lähellä perigeumia pimennys ei ole koskaan rengasmaisen.

7.5 a) Seuraavan sivun kuvan varjostetuista yhdenmuotoisista kolmioista saadaan

$$\frac{R_{\odot} - R_{\oplus}}{r_{\oplus}} = \frac{R_{\oplus} - d/2}{r} \Rightarrow d = 2 \left(R_{\oplus} - \frac{r}{r_{\oplus}} (R_{\odot} - R_{\oplus}) \right).$$

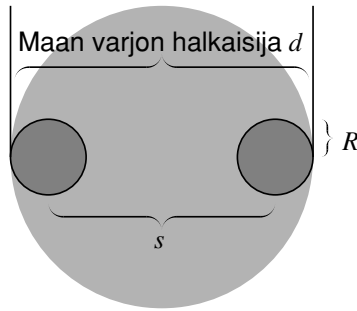
(Kuvassa Aurinkoa ja Maata sivuavat suorat on piirretty hieman väärin asian yksinkertaistamiseksi, mutta sillä ei ole juuri mitään

vaikutusta tulokseen, koska kappaleiden koot ovat hyvin pieniä niiden välisiin etäisyyksiin verrattuna.) Kun kaavaan sijoitetaan suureiden arvot (ks. edellinen tehtävä), saadaan Maan varjon halkaisijaksi Kuun etäisyydellä $d = 9200$ km.



b) Täydellisen kuunpimennyksen kesto aika saadaan laskemalla matka, jonka Kuu joutuu Maan varjossa kulkemaan:

$$s = d - 2R = 9200 \text{ km} - 2 \times 1738 \text{ km} = 5700 \text{ km}.$$



Kuun keskimääräinen kulmanopeus saadaan synodisesta kiertoaikasta 29.53 d. (Miksi tässä on käytettävä synodista eikä sideeristä kiertoaikaa? Mieti, kuinka varjo liikkuu!) Varjossa vietetty aika on siis

$$t = \frac{s}{2\pi r / P_{\text{syn}}} = \frac{5700 \text{ km}}{2\pi 384\,400 \text{ km} / 29.53 \text{ d}} \\ = 0.07 \text{ d} = 1 \text{ h } 40 \text{ min}.$$

7.6 a) Kuun näennäinen läpimita 27.11.1981 oli

$$\alpha = \frac{2R}{63.75 R_{\oplus}} = \frac{2 \times 1738 \text{ km}}{63.75 \times 6378 \text{ km}} \\ = 8.55 \times 10^{-3} \text{ rad} = 0.490^\circ = 29.4'.$$

Vastaavasti läpimitaksi 11.12 saadaan $0.558^\circ = 33.5'$.

b) Kuun apogeumetäisyys rataelementeistä laskettuna on

$$r_a = a(1 + e) = 384\,400 \text{ km} (1 + 0.055) \\ = 405\,500 \text{ km} = 63.58 R_{\oplus}.$$

Perigeumetäisyys on

$$r_p = a(1 - e) = 363\,300 \text{ km} = 56.95 R_{\oplus}.$$

Vaikka a)-kohdan arvot menevätkin b)-kohdassa saadun välin ulkopuolelle, ei ole vielä syytä juosta karkuun. Kuun rata poikkeaa Maan, Auringon ja planeettojen yhteisvaikutuksen vuoksi puhtaasta ellipsistä, ja sen rataelementit muuttuvat jatkuvasti. Apoja perigeumetäisyydet vaihtelevat parinkin Maan säteen verran. Esimerkiksi perigeumeissa 11.12.1981 ja 4.3.1982 etäisyys Maasta oli $55.9R_{\oplus}$ ja $58.0R_{\oplus}$.

- 7.7 Sana *oppositio* paljastaa, että kyseessä on ulkoplaneetta. Oppositoiden välinen aika on juuri synodisen jakson mittainen, joten sidderinen kiertoaika saadaan yhtälöstä

$$\begin{aligned} \frac{1}{P_{\text{sid}}} &= \frac{1}{P_{\oplus}} - \frac{1}{P_{\text{syn}}} \\ &= \frac{1}{365.256 \text{ d}} - \frac{1}{398.9 \text{ d}} = 2.31 \times 10^{-4} \text{ d}^{-1}. \end{aligned}$$

\Rightarrow

$$P_{\text{sid}} = 4331 \text{ d} = 11.9 \text{ a.}$$

Keplerin kolmannesta laista puolestaan seuraa, että radan isoakselin puolikas on

$$a = P^{2/3} = 5.20 \text{ AU.}$$

Oppositiossa planeetan etäisyys on 1 AU vähemmän, joten todellinen läpimitta saadaan oppositiossa havaitusta näennäisestä kulmaläpimitasta:

$$d = \alpha r = \frac{\pi}{180} \frac{47.2}{3600} 4.20 \times 1.496 \times 10^{11} \text{ m} = 144\,000 \text{ km.}$$

Näistä voimme päätellä, että planeetta lienee Jupiter.

- 7.8 a) Synodisen jakson kuluttua kappaleiden väliset longitudierot ovat samat kuin alkuhetkellä. Tämä on mahdollista vain, jos kappaleiden liikkumat kulmat poikkeavat toisistaan 2π :n monikertojen verran. Voimme siis määrittellä, että on olemassa synodinen jakso P jos ja vain jos on olemassa kokonaisluvut p ja q siten, että

$$\begin{aligned} n_2 P &= n_1 P + p2\pi, \\ n_3 P &= n_1 P + q2\pi. \end{aligned} \tag{1}$$

1° Oletetaan aluksi, että \exists synodinen jakso P . Edelläolevat yhtälöt voidaan kirjoittaa muotoon

$$\begin{aligned} (n_2 - n_1)P &= p2\pi, \\ (n_3 - n_1)P &= q2\pi. \end{aligned}$$

Kaikki n_i :t ovat erisuuria, joten $n_3 - n_1 \neq 0$ ja edellinen yhtälö voidaan jakaa jälkimmäisellä:

$$\frac{n_2 - n_1}{n_3 - n_1} = \frac{p}{q} \Rightarrow n_2 q - n_1 q = n_3 p - n_1 p$$



eli

$$n_1(p - q) + n_2q - n_3p = 0.$$

Jos nyt valitaan $k_1 = p - q$, $k_2 = q$ ja $k_3 = -p$, on

$$k_1 + k_2 + k_3 = 0, \quad k_1n_1 + k_2n_2 + k_3n_3 = 0,$$

kuten väitettiin.

2° Oletetaan sitten, että $\exists k_1, k_2, k_3 \in \mathbf{Z}$ siten, että

$$k_1 + k_2 + k_3 = 0, \quad k_1n_1 + k_2n_2 + k_3n_3 = 0.$$

Keskiliikkeiden välille voidaan aina kirjoittaa yhtälöt (1), missä P on jokin mielivaltainen aikaväli ja p ja q reaalityyppisiä lukuja. Nyt on osoitettava, että löytyy P siten, että p ja q ovat kokonaislukuja. Oletusten perusteella on

$$n_3 = \frac{k_1n_1 + k_2n_2}{k_1 + k_2}.$$

Ratkaistaan p ja q yhtälöistä (1):

$$p = \frac{P}{2\pi}(n_1 - n_2),$$

$$q = \frac{P}{2\pi}(n_1 - n_3).$$

Koska $n_1 \neq n_3$, saamme

$$\begin{aligned} \frac{p}{q} &= \frac{n_1 - n_2}{n_1 - n_3} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 - \frac{k_1n_1 + k_2n_2}{k_1 + k_2}} \\ &= \frac{(k_1 + k_2)(n_1 - n_2)}{k_1n_1 + k_2n_1 - k_1n_1 - k_2n_2} \\ &= \frac{k_1 + k_2}{k_2}. \end{aligned}$$

Koska k_i :t ovat kokonaislukuja, p/q on rationaalinen, ja on siis olemassa ratkaisuja, joissa p ja q ovat kokonaislukuja. Koska synodinen jakso on lyhin aikaväli, jonka jälkeen keskinäiset asemat toistuvat samanlaisina, p ja q voidaan laskea supistamalla $(k_1 + k_2)/k_2$ yksinkertaisimpaan muotoonsa ja valitsemalla jäljelle jääneen murtoluvun osoittaja ja nimittäjä p :ksi ja q :ksi.

b) Nyt $k_1 = 1$, $k_2 = -3$ ja $k_3 = 2$. Tästä saadaan

$$\frac{p}{q} = \frac{1 - 3}{-3} = \frac{-2}{-3} \Rightarrow p = -2, \quad q = -3,$$

joten

$$n_{\text{Europa}}P = n_{\text{Io}}P - 4\pi,$$

$$n_{\text{Ganymedes}}P = n_{\text{Io}}P - 6\pi.$$

Periodi voidaan ratkaista kummasta tahansa yhtälöstä:

$$P = \frac{4\pi}{n_{\text{Io}} - n_{\text{Europa}}} = \frac{6\pi}{n_{\text{Io}} - n_{\text{Ganymedes}}}.$$



Kuiden keskiliikkeet saadaan taulukoiduista kiertoajoista $P_{\text{Io}} = 1.77 \text{ d}$, $P_{\text{Europa}} = 3.55 \text{ d}$, $P_{\text{Ganymedes}} = 7.15 \text{ d}$. \Rightarrow

$$n_{\text{Io}} = 3.5498 \text{ rad d}^{-1},$$

$$n_{\text{Europa}} = 1.7699 \text{ rad d}^{-1},$$

$$n_{\text{Ganymedes}} = 0.8788 \text{ rad d}^{-1}.$$

Näistä saadaan synodisen jakson pituudeksi $P = 7.06 \text{ d}$.

Huom! Edellä oleva todistus osoittaa, että kolmen tai useamman kappaleen systeemillä ei ole lainkaan synodista jaksoa, elleivät kappaleet ole resonanssissa keskenään. Tosin tulos on matemaattinen; fysikaalisempaa on vaatia vain, että tilanne toistuu tietyllä tarkkuudella. Tällöin voidaan aina löytää sellaiset (useimmiten hyvin isot) kokonaisluvut, että em. ehdot toteutuvat. On kuitenkin mieleöntä ryhtyä esimerkiksi laskemaan, milloin koko aurinkokunta palaa uudestaan jonakin hetkenä valliineseen konfiguraatioon. Käytännössä tämä ei tapahdu koskaan.

- 7.9 Jos planeetan sideerinen kiertoaika (vuoden pituus) on P ja sideerinen pyörähdysaika T , saadaan vuorokauden pituus τ yhtälöstä

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{T} \pm \frac{1}{P},$$

missä $-$ -merkki vastaa pyörimistä suoraan suuntaan ja $+$ -merkki retrogradista pyörimistä.

Merkuriuksen kiertoaika Auringon ympäri on noin 88 d ja sideerinen pyörähdysaika $\frac{2}{3}$ tästä eli 58.6 d. Synodiseksi pyörähdysajaksi saadaan

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{58.6 \text{ d}} - \frac{1}{88 \text{ d}} = 0.0057 \text{ d}^{-1} \Rightarrow \tau = 175.4 \text{ d}.$$

Vastaavasti Venuksen vuorokauden pituudeksi saadaan ($T = 243.1 \text{ d}$, $p = 224.6 \text{ d}$):

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{243.1 \text{ d}} + \frac{1}{224.6 \text{ d}} = 0.0086 \text{ d}^{-1} \Rightarrow \tau = 116.7 \text{ d}.$$

Venushan pyörii väärinpäin, joten piti valita ynnämerkki.

- 7.10 Pluto-Charon-systeemin massa saadaan suoraan Keplerin kolmanesta laista:

$$P^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{G(m_1 + m_2)}$$

\Rightarrow

$$\begin{aligned} m_1 + m_2 &= \frac{4\pi^2 (20\,000\,000)^3}{6.670 \times 10^{-11} \times (6.39 \times 24 \times 3600)^2} \\ &= 1.55 \times 10^{22} \text{ kg}. \end{aligned}$$

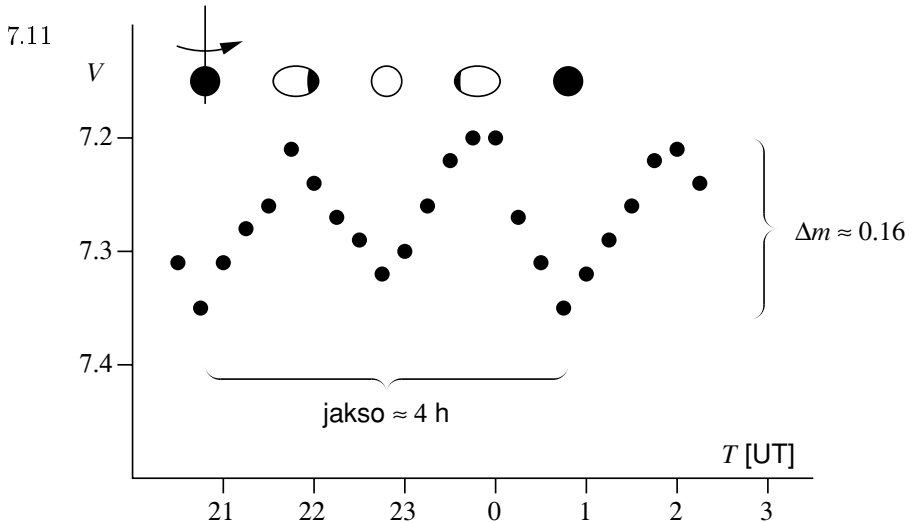
Jos kummankin kappaleen tiheys oletetaan samaksi, massa jakautuu suhteessa $1500^3 : 2500^3 \approx 1 : 4.6$. Pluton massa on siis $1.3 \times 10^{22} \text{ kg}$ ja Kharonin $0.3 \times 10^{22} \text{ kg}$. Kun Pluton läpimitta on



2500 km, tiheys on

$$\rho = \frac{1.3 \times 10^{22}}{\frac{4}{3}\pi(1\,250\,000)^3} = 1600 \text{ kg m}^{-3}$$

eli runsas puolitoista kertaa veden tiheys.



Vaihtelut johtuvat epäsäännöllisen kappaleen pyörimisestä. Säännöllinen ellipsoidi tuottaisi käyrän, jossa on kaksi samanlaista maksimia ja kaksi yhtä syvää minimiä. Erilaiset minimit voivat johtua pinnan albedon vaihteluista.

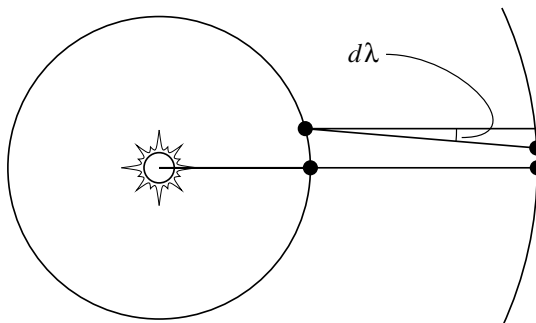
7.12 a) Ympyräradalla nopeus on

$$v = \frac{2\pi a}{P}$$

Kun tähän sijoitetaan Keplerin kolmas laki, saadaan

$$v = \sqrt{\frac{GM}{a}},$$

missä on oletettu, että planeettojen massat ovat hyvin pieniä Aurinkon massaan verrattuna.



Takenevan liikkeen kulmanopeus on

$$\omega = \frac{d\lambda}{dt}.$$

Ajassa dt sisempi planeetta liikkuu matkan $dt\sqrt{GM/a_1}$ ja ulompi matkan $dt\sqrt{GM/a_2}$. Kun dt on pieni, ulomman planeetan take-
nevan liikkeen määrä on likimain

$$d\lambda = \frac{dt\sqrt{\frac{GM}{a_1}} - dt\sqrt{\frac{GM}{a_2}}}{a_2 - a_1}$$

\Rightarrow

$$\frac{d\lambda}{dt} = \sqrt{GM} \frac{1}{\sqrt{a_1 a_2} (\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2})}.$$

b) Käytetään Pluton etäisyytenä sen radan isoakselin puolikasta $a_2 = 39.75$ AU. Koska tilannetta tarkkaillaan Maasta käsin, on $a_1 = 1$ AU. Tässäpä onkin sopivaa valita yksiköiksi AU, M_\odot ja d, jolloin gravitaatiovakion arvo on $\gamma = 0.0002959$. (Kts. tehtävä 1.10. Tätä Gaussin gravitaatiovakiota merkitään yleensä γ :lla eikä G :llä.) Saamme

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda}{dt} &= \sqrt{0.0002959 \times 1} \frac{1}{\sqrt{1 \times 39.75} (\sqrt{1} + \sqrt{39.75})} \frac{\text{rad}}{\text{d}} \\ &= 3.74 \times 10^{-4} \text{ rad d}^{-1} = 0.021^\circ \text{ d}^{-1} = 1.3' \text{ d}^{-1}. \end{aligned}$$

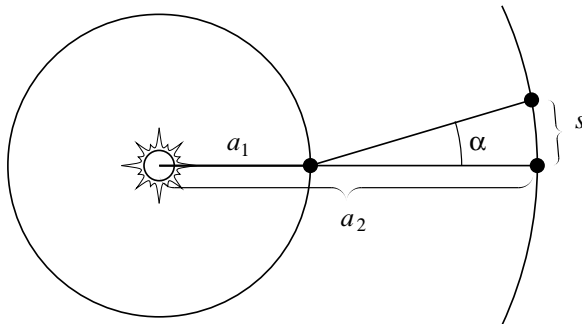
Kuudessa vuorokaudessa Pluto liikkuu siis noin 0.128° . Kun valokuvauslevyllä yksi aste vastaa kolmea senttiä, Pluton liike on noin 4 mm.

Tyypillisen asteroidin etäisyys Auringosta on 2.8 AU. Asteroidin take-
nevan liikkeen suuruus opposition lähistöllä on siten

$$\frac{d\lambda}{dt} = 3.8 \times 10^{-3} \text{ rad d}^{-1} = 0.22^\circ \text{ d}^{-1},$$

siis likimain kymmenkertainen Pluton liikkeeseen verrattuna. Kuudessa vuorokaudessa asteroidi olisi liikkunut samaisella levyllä nelisen senttiä.

7.13



Kuvan merkinnöin valon matkallaan planeetasta Maahan viettä-
mä aika on

$$t = \frac{|a_2 - a_1|}{c}.$$

Tänä aikana planeetta ehtii liikkua matkan

$$s = v_2 t = v_2 \frac{|a_2 - a_1|}{c}$$

eli Maasta nähtynä kulman

$$\alpha = \frac{s}{|a_2 - a_1|} = \frac{v_2}{c}.$$

Ratanopeus ympyräradalla on

$$v = \frac{2\pi a}{P} = \frac{2\pi a}{\sqrt{\frac{4\pi^2 a^3}{GM_\odot}}} = \sqrt{\frac{GM_\odot}{a}}.$$

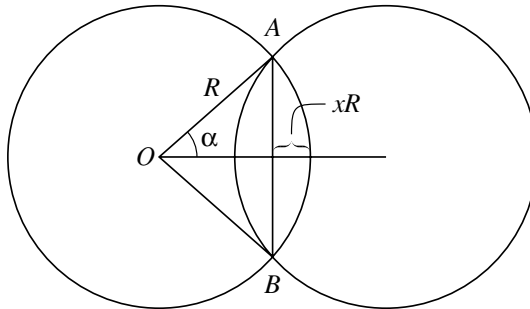
Sijoittamalla tämä kulman lausekkeeseen saadaan

$$\alpha = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{GM_\odot}{a_2}}.$$

Kaavasta nähdään, että muutos on suurin, kun a_2 on pienin. Muutos on siis suurin Merkuriukselle

$$\begin{aligned} \alpha_{\text{Merkurius}} &= \frac{1}{3 \times 10^8} \sqrt{\frac{6.67 \times 10^{-11} \times 1.989 \times 10^{30}}{0.387 \times 1.496 \times 10^{11}}} \\ &= 1.6 \times 10^{-4} \text{ rad} = 33''. \end{aligned}$$

- 7.14 Tämä tehtävä on identtinen vanhan kansanpähkinän kanssa: kuinka suuren osan pyöreästä kaalimaasta pukki pystyy syömään, jos se on lieassa kaalimaan reunalla, ja kaalimaan halkaisija ja liekanarun pituus tunnetaan?



Kuun peittämä osa pinta-alasta saadaan vähentämällä sektorin OAB pinta-alasta keskuskolmion OAB pinta-ala ja kertomalla tämä kahdella:

$$\begin{aligned} A &= 2 \left(\frac{1}{2} \times 2\alpha R^2 - \frac{1}{2} (1-x)R \times 2\sqrt{R^2 - ((1-x)R)^2} \right) \\ &= 2R^2 (\arccos(1-x) - (1-x)\sqrt{2x-x^2}). \end{aligned}$$

Auringon pinta-alasta on siis peittynyt osa

$$p = \frac{A}{\pi R^2} = \frac{2}{\pi} (\arccos(1-x) - (1-x)\sqrt{2x-x^2}).$$

Pimennyksessä 2.07.1982 oli Helsingissä Auringon halkaisijasta peittyneenä osa $x = 0.39$. Pinta-alasta oli silloin Kuun peittämänä osa $p = 0.27$. Soveltamalla magnitudikaavaa muodossa

$$m - m_0 = -2.5 \lg(1 - p)$$

saadaan Auringon magnitudiksi pimennyshetkellä

$$m = -26.7 - 2.5 \lg(1 - 0.27) = -26.4.$$

7.15 Kaavasta (7.30) saadaan geometriselle albedolle lauseke

$$p = \left(\frac{r\Delta}{aR} \right)^2 10^{-0.4(m_0 - m_\odot)},$$

missä r on kappaleen etäisyys Auringosta, Δ etäisyys Maasta, a astronominen yksikkö, R kappaleen säde, m_0 sen näennäinen magnitudi vaihekulmalla $\alpha = 0^\circ$ ja m_\odot Auringon näennäinen magnitudi Maasta nähtynä. Koska Kuu on varsin lähellä Maata, voimme approksimoida $r \approx a$. Kun lisäksi huomataan, että

$$\frac{R}{\Delta} = \frac{\theta}{2},$$

missä θ on kulmaläpimitta (radiaaneissa!), saadaankin geometrisesti albedoksi

$$p = \frac{10^{-0.4(m_0 - m_\odot)}}{(\frac{1}{2}\theta)^2} = \frac{10^{-0.4(-12.5 - (-26.7))}}{(\frac{1}{2}0.5\pi/180)^2} \approx 0.11.$$

Bondin albedo A saadaan, jos vaiheintegraali q tunnetaan:

$$A = pq.$$

Vaiheintegraali q on

$$q = 2 \int_0^\pi \Phi(\alpha) \sin \alpha \, d\alpha,$$

missä $\Phi(\alpha)$ on vaihefunktio. Jos sironta tapahtuu isotrooppisesti kaikkiin suuntiin, on $\Phi(\alpha) = 1$, joten

$$q = 2 \int_0^{\pi/2} \sin \alpha \, d\alpha = 2.$$

(Huom: integraalin yläraja on nyt $\pi/2$, koska pinta on varjossa, kun $\alpha \in [\pi/2, \pi)$.) Niinpä

$$A = 0.11 \times 2 \approx 0.2.$$

Todellisuudessa Kuu heijastaa voimakkaasti taaksepäin, joten A on edellä saatua pienempi.

7.16 Merkuriuksen suurin ja pienin etäisyys Auringosta on

$$\begin{aligned} r_{\max} &= a(1 + e), \\ r_{\min} &= a(1 - e). \end{aligned}$$



Koska vuontiheys on kääntäen verrannollinen etäisyyden neliöön, Auringon näennäisen magnitudin muutos on suurimmillaan

$$\begin{aligned} m_{\max} - m_{\min} &= -2.5 \lg \frac{F_{\max}}{F_{\min}} \\ &= -2.5 \lg \left(\frac{r_{\min}}{r_{\max}} \right)^2 = -5 \lg \left(\frac{1-e}{1+e} \right). \end{aligned}$$

Kun $e = 0.206$, saadaan magnitudivaihteluksi

$$m_{\max} - m_{\min} = -5 \lg \frac{1 - 0.206}{1 + 0.206} = 0.91.$$

Auringon pintakirkkaus ei muutu mihinkään katseltiinpa sitä Merkuriuksesta tai Taka-Hikiältä. Asiaa on selvitelty oppikirjan luvussa 4.1.

7.17 Nopeudella 30 km s^{-1} liikkuva asteroidi kulkee päivässä matkan

$$30 \text{ km s}^{-1} \times 86\,400 \text{ s} = 2\,592\,000 \text{ km} = 1.73 \times 10^{-2} \text{ AU}$$

ja viikossa 0.121 AU . Kun asteroidi tulee päin vaihekulmalla $\alpha = 0^\circ$, on vaihefunktio $\Phi(\alpha) = 1$, joten siitä ei tarvitse huolehtia. (Tosin se ei muuttaisi lopputulosta millään tavoin.) Lasketaan ensin suure $V(1,0)$ (oppikirjan kaava (7.32)). Nyt Auringon näennäinen visuaalinen magnitudi on $m_{\odot} = -26.8$, geometrinen albedo $p = 0.1$, kappaleen säde $R = 0.05 \text{ km} = 3.34 \times 10^{-10} \text{ AU}$, ja $a = 1 \text{ AU}$, joten

$$V(1,0) = m_{\odot} - 2.5 \lg p \frac{R^2}{a^2} = 23.$$

Magnitudi saadaan sitten kaavasta (7.33):

$$m = V(1,0) + 5 \lg \frac{r\Delta}{a^2},$$

missä r on etäisyys Auringosta ja Δ etäisyys maapallosta. Päivää ennen törmäystä $\Delta = 0.0173 \text{ AU}$ ja $r = 1.017 \text{ AU}$ (vaihekulman oli 0°), joten magnitudiksi saadaan

$$m_1 = 23 + 5 \lg \frac{1.017 \times 0.0173}{1^2} = 14.2.$$

Vastaavasti viikkoa ennen törmäystä on magnitudi $m_7 = 18.7$. Tämmöisen otuksen havaitseminen edes päivää ennen on melko lailla mahdotonta. Täytyy siis vain tyynenä odottaa, milloin rysähtää. (Ja niitähän rysähtää, ehkä kerran pari vuosimiljoonassa, siis samaan tahtiin kuin keskimääräiselle lottoajalle tulee päävoitto.)

Yritetään arvioida alaraja törmäyksessä vapautuvalle energialle. Tiheys on veden tiheyttä suurempi ja luultavasti samaa luokkaa kuin Marsin tai Jupiterin pienillä kuilla. Arvioidaan, että $\rho = 2 \text{ g cm}^{-3} = 2000 \text{ kg m}^{-3}$. Vaikka näin pieni kappale ei olekaan pallomainen, saamme kuitenkin kohtuullisen arvion sen koolle ku-

vittelemalla sen pallomaiseksi. Asteroidin massa olisi silloin

$$M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho = \frac{4}{3}\pi 50^3 \times 2000 \text{ kg} \approx 1\,000\,000 \text{ kg}.$$

Törmäysnopeus on ainakin 30 km s^{-1} , joten kineettinen energia on

$$E = \frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{2} \times 1\,000\,000 \times (30\,000)^2 \text{ J} \\ \approx 4.7 \times 10^{17} \text{ J}.$$

Koska yksi trotyylitonni vastaa $4.184 \times 10^9 \text{ J}$, asteroidin törmäys vastaa ainakin runsaan 110 megatonnin pommia.

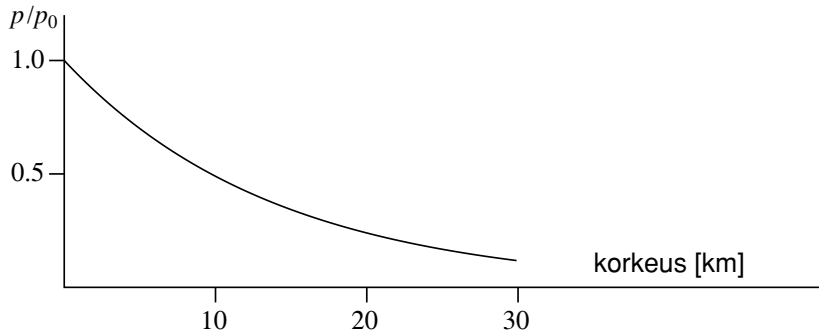
7.18 Paine korkeudella h on

$$\frac{p}{p_0} = e^{-h/H},$$

missä p_0 on paine planeetan pinnalla ja H on skaalakorkeus

$$H = \frac{kT}{\mu g},$$

missä k on Boltzmannin vakio $k = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$, T on lämpötila, μ molekyylipaino ja g gravitaatiokiihtyvyys. Maapallolle $T \approx 300 \text{ K}$, $g \approx 9.81 \text{ m s}^{-2}$ ja $\mu_{H_2O} = (2 \times 1 + 16) \text{ amu} = 2.988 \times 10^{-26} \text{ kg}$. Näistä tiedoista saadaan skaalakorkeudeksi $H = 14 \text{ km}$.



Vesihöyryn osapaine on pudonnut puoleen korkeudella

$$h = -H \ln(0.5) = 9.7 \text{ km}.$$

7.19 Lämpötila saadaan kaavasta (7.41):

$$T = T_{\odot} \left(\frac{1-A}{2} \right)^{1/4} \left(\frac{R_{\odot}}{r} \right)^{1/2}.$$

Sijoitetaan tähän $A = 0.05$, $T_{\odot} = 5800 \text{ K}$ ja $R_{\odot} = 6.96 \times 10^8 \text{ m}$, jolloin saadaan

$$T = \frac{1.27 \times 10^8 \text{ K m}^{1/2}}{\sqrt{r}}.$$

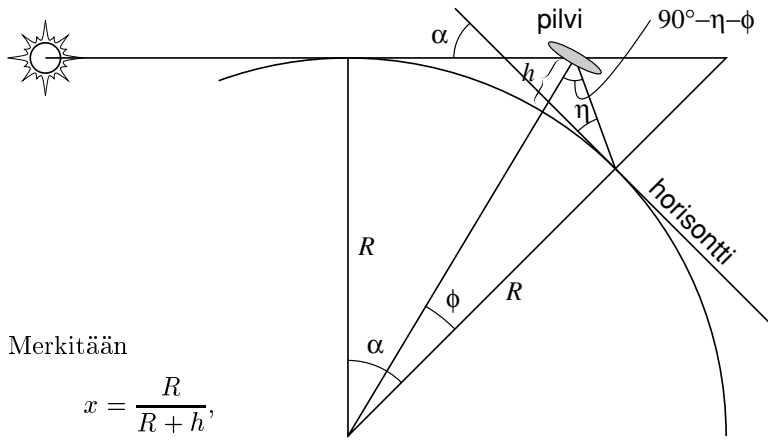
Lämpötilat eri etäisyyksillä ovat

$$T(10 \text{ AU}) = \frac{1.27 \times 10^8}{\sqrt{1.496 \times 10^{12}}} \text{ K} = 104 \text{ K},$$

$$T(1 \text{ AU}) = 328 \text{ K},$$

$$T(0.5 \text{ AU}) = 464 \text{ K}.$$

- 7.20 Kuvassa Aurinko näkyy (tai siis ei näy) kulmassa α horisontin alapuolella. Havaittajan kannalta korkeimmalla olevat yöpilvet näkyvät kulmassa η horisontin yläpuolella. Olkoon näiden pilvien korkeus maanpinnasta $\geq h$.



Merkitään

$$x = \frac{R}{R+h},$$

jolloin

$$\cos(\alpha - \phi) = \frac{R}{R+h} = x,$$

$$\frac{\sin[90^\circ - (\eta + \phi)]}{\sin(90^\circ + \eta)} = \frac{R}{R+h} = x$$

\Rightarrow

$$\cos(\alpha - \phi) = x,$$

$$\sin(\alpha - \phi) = \sqrt{1 - x^2},$$

$$\cos(\eta + \phi) = x \cos \eta,$$

$$\sin(\eta + \phi) = \sqrt{1 - x^2} \cos \eta.$$

Nyt kirjoitetaan $\alpha + \eta = \alpha - \phi + \eta + \phi$, jolloin

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \eta) &= \cos(\alpha - \phi) \cos(\eta + \phi) - \sin(\alpha - \phi) \sin(\eta + \phi) \\ &= x^2 \cos \eta - \sqrt{1 - x^2} \sqrt{1 - x^2} \cos^2 \eta. \end{aligned}$$

Tästä ratkaistaan $x = 1/(1 + h/R)$, josta edelleen saadaan h/R :

$$\frac{h}{R} = \frac{\sqrt{1 + \cos^2 \eta - 2 \cos \eta \cos(\alpha + \eta)} - \sin(\alpha + \eta)}{\sin(\alpha + \eta)}.$$

Johdetaan tälle vielä vähän yksinkertaisempi likimääräinen lauseke. Koska

$$\left(1 + \frac{h}{R}\right)^2 = \frac{1 + \cos^2 \eta - 2 \cos \eta \cos(\alpha + \eta)}{\sin^2(\alpha + \eta)}$$

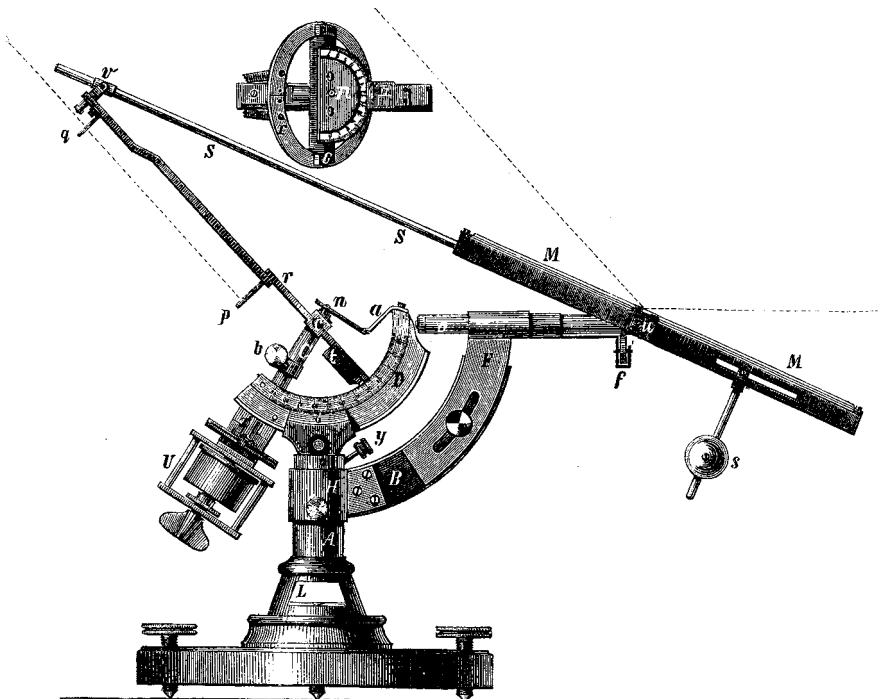
ja $h \ll R$, on

$$\left(1 + \frac{h}{R}\right)^2 \approx 1 + 2\frac{h}{R},$$

joten

$$\begin{aligned} \frac{h}{R} &\approx \frac{1}{2} \left(\frac{\cos \eta - \cos(\alpha + \eta)}{\sin(\alpha + \eta)} \right)^2 \\ &\approx \frac{1}{8} \alpha^2 \left(\frac{2\eta + \alpha}{\eta + \alpha} \right)^2, \quad [\alpha] = \text{rad}. \end{aligned}$$

Jos esimerkiksi Aurinko on 10° horisontin alapuolella ja pilvi näkyy 10° korkeudella, on $h/R = 0.0087$, josta saadaan korkeudeksi $h = 55$ km. Todellisuudessa näiden pilvien korkeudet ovat jopa $75 - 90$ km.



8 Tähtien spektrit

8.1 Oikea tapa mitata välimatkoja on asettaa mittanauha satunnai-
seen kohtaan spektrin päälle ja lukea erikseen kummankin viivan
paikka. Kun mittauksia tehdään useampia ja lasketaan niiden
keskiarvo, saadaan yksittäistä mittausta luotettavampi arvo. Tä-
män ratkaisun kirjoittaja mittasi kunkin viivaparin välin kolmeen
kertaan.

a) Viivojen H_γ ja H_ζ aallonpituusväli on $434.0 \text{ nm} - 388.9 \text{ nm} = 45.1 \text{ nm}$. Mittaustulokset olivat:

$$1 : 110.4 \text{ mm} - 38.9 \text{ mm} = 71.5 \text{ mm},$$

$$2 : 209.0 \text{ mm} - 137.5 \text{ mm} = 71.5 \text{ mm},$$

$$3 : 277.8 \text{ mm} - 206.3 \text{ mm} = 71.5 \text{ mm}.$$

Viivojen välimatka lienee siis noin 71.5 mm , joten dispersio on
 $D_1 = 45.1 \text{ nm}/71.5 \text{ mm} = 0.631 \text{ nm mm}^{-1}$.

γ - ja ϵ -viivojen etäisyydeksi saatiin eri mittauserroilla 58.5 mm ,
 58.7 mm ja 58.5 mm ja keskiarvoksi 58.57 mm . Dispersio on
 $D_2 = 37.0 \text{ nm}/58.57 \text{ mm} = 0.632 \text{ nm mm}^{-1}$.

Kolmas viivapari (H_δ ja H_ζ) antoi välimatkoiksi 33.7 mm , 33.9 mm
ja 33.7 mm . Näiden keskiarvo on 33.77 mm ja dispersio $D_3 = 21.3 \text{ nm}/33.77 \text{ mm} = 0.631 \text{ nm mm}^{-1}$.

Keskimääräinen dispersio on

$$D = \frac{1}{3}(D_1 + D_2 + D_3) = 0.631 \text{ nm mm}^{-1}.$$

(Kuvan mittakaava on saattanut hieman muuttua painatuksen
eri vaiheissa, joten älä ihmettele, vaikka saisit hieman erilaisen
arvon).

Dispersio voidaan ilmoittaa myös muodossa, joka kertoo, miten
moninkertaisiksi aallonpituudet ovat kuvassa venyneet. Näin il-
moitettu dispersio olisi $1 \text{ mm}/0.61 \text{ nm} = 1 \text{ mm}/6.1 \times 10^{-7} \text{ mm} = 1\,640\,000$.

b) Ensimmäisen viivan aallonpituus on 6.9 nm pienempi kuin
 H_ζ :n, joten sen pitäisi näkyä matkan

$$\Delta x = \frac{\Delta \lambda}{D} = \frac{6.9 \text{ nm}}{0.631 \text{ nm mm}^{-1}} = 10.9 \text{ mm}$$

päässä H_ζ :n vasemmalla puolella. Tältä kohtaa spektristä todellakin löytyy viiva.

Toisen viivan pitäisi olla 8.9 mm oikealla H_ϵ :sta. Tämäkin viiva näkyy spektrissä selvästi.

K-viivan paikka olisi 5.7 mm vasemmalle H_ϵ :sta eli suunnilleen H_ζ :n ja H_ϵ :n puolivälissä. Tällä välillä ei kuitenkaan näy yhtään viivaa.

c) Spektrissä näkyy heliumin viivoja, mutta ei kalsiumin K-viivaa, joten spektriluokka on O tai B. Voimakkaat vedyn viivat osoittavat, että luokka on B, todennäköisesti noin B5.

8.2 a) Ensimmäiseksi on laskettava, miten paljon kuvaa on suurennettu. Mitataan joukko yläreunan viivojen välejä edellä kuvatulla menetelmällä (tarkkuuden parantamiseksi kannattaa käyttää melko kaukana toisistaan olevia viivoja), jolloin kahden vierekkäisen viivan keskimääräiseksi etäisyydeksi saadaan noin 13.29 mm. Todellisuudessa viivojen väli on yksi millimetri, joten kuvan mitataava on 1:13.29.

Sitten mitataan samalla tavoin spektriviivojen välimatkoja ja toistetaan mittaus muutamia kertoja. Niistä voidaan sitten laskea vakion A arvot. Seuraavan taulukon välimatkat ovat kolmen mitauksen keskiarvoja. Tässä d on kuvasta mitattu arvo, d' välimatka alkuperäisellä levyllä ja $f = (1/\lambda_1^2 - 1/\lambda_2^2)$.

	d [mm]	d' [mm]	f [nm ²]	A [mm nm ²]
$H_\delta - H_\eta$	33.76	2.540	8.528×10^{-7}	2.98×10^6
$H_\gamma - H_\eta$	57.32	4.313	1.489×10^{-6}	2.90×10^6
$H_\beta - H_\gamma$	37.77	2.842	1.075×10^{-6}	2.64×10^6
$H_\beta - H_\delta$	61.33	4.615	1.711×10^{-6}	2.70×10^6

Näiden keskiarvona saamme, että A on noin 2.8×10^6 mm nm². Jos annetaan esimerkiksi λ_2 :n kasvaa äärettömäksi, nähdään, että viivan paikka voidaan ilmoittaa muodossa $d = A/\lambda^2$. Dispersio on aallonpituuden derivaatta d :n suhteen:

$$D = \left| \frac{d\lambda}{dd} \right| = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{A}{d^3}} = \frac{1}{2} \frac{\lambda^3}{A}.$$

Esimerkiksi Balmerin epäjatkuvuuden kohdalla saisimme tästä dispersioksi 8.7 nm mm^{-1} eli 115 000. H_β -viivan kohdalla dispersio on 20.5 nm mm^{-1} eli 49000.

b) Kuvassa olevan kopion perusteella spektriluokkaa ei voi kovin tarkasti määrätä. Ylempää spektriä hallitsee vedyn Balmerin sarja, mutta siinä näkyy heikosti myös joitakin metallien viivoja, kuten alemmassakin. Spektriluokka on noin A. Ylemmässä spektrissä kalsiumin K-viiva on erittäin heikko, mutta alemmassa suunnilleen yhtä voimakas kuin vedyn viivat, joten alempi tähti on ylempää viileämpi; sen spektriluokka on noin F.

9 Kaksoistähdet ja tähtien massat

9.1 Keplerin kolmannelta laista saadaan kiertoaika:

$$P^2 = \frac{a^3}{m_1 + m_2} = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2} a^2,$$

josta $P = 1/\sqrt{2}$ vuotta. Tähtien nopeus toistensa suhteen on

$$\begin{aligned} v &= \frac{2\pi a}{P} = \frac{2\pi \times 1}{1/\sqrt{2}} \text{ AU a}^{-1} = 2\pi\sqrt{2} \text{ AU a}^{-1} \\ &= \frac{2\pi\sqrt{2} \times 1.496 \times 10^{11} \text{ m}}{3.156 \times 10^7 \text{ s}} = 42\,100 \text{ m s}^{-1}. \end{aligned}$$

Aallonpituuksien suurin erotus on

$$\Delta\lambda = \frac{v}{c} \lambda_0 = \frac{42\,100 \text{ m s}^{-1}}{3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}} \times 434.05 \text{ nm} = 0.061 \text{ nm}.$$

9.2 Tähtien etäisyys meistä on

$$r = \frac{1}{\pi} = \frac{1}{0.1''} = 10 \text{ pc}.$$

Tähtien välimatka on suurimmillaan

$$a \geq 10 \text{ pc} \times 5'' = 50 \text{ AU}.$$

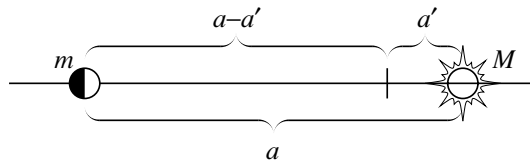
Tässä pätee yhtäsuuruus, jos rata on kohtisuorassa näkösädettä vastaan. Massojen summa saadaan Keplerin kolmannelta laista

$$m_1 + m_2 = \frac{a^3}{P^2} \geq \frac{50^3}{50^2} M_\odot = 50 M_\odot.$$

9.3 Ja taaskin käytämme Keplerin kolmoslakia:

$$a = \sqrt[3]{(m_1 + m_2)P^2} = \sqrt[3]{4 \times 50^2} \approx 22 \text{ AU}.$$

9.4 a)



Massakeskipisteen määritelmästä saadaan $m(a - a') = M a'$ ja siis $m = M a' / (a - a')$ ja Keplerin kolmannelta laista

$$P^2 = \frac{a^3}{m + M} = \frac{a^3}{M \left(\frac{a'}{a - a'} + 1 \right)} = \frac{a^3 (a - a')}{M a},$$

josta

$$MP^2 = a^2(a - a').$$

b) Sijoitetaan saatuun yhtälöön $P = 25$ a, $r = 1.83$ pc, jolloin $a' = 0.026'' \times 1.83$ pc = 0.047 AU ja $M = 0.135 M_{\odot}$. Saamme yhtälön

$$0.135 \times 25^2 = a^3 - a^2 \times 0.047.$$

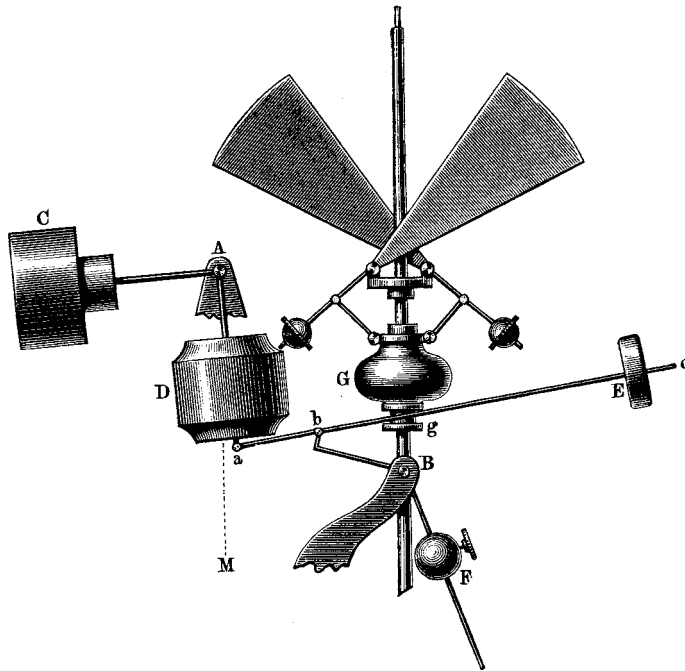
Tämä voidaan ratkaista iteroimalla kirjoittamalla yhtälö muotoon

$$a = \sqrt[3]{0.047a^2 + 84.375}.$$

Ratkaisuksi saadaan $a = 4.4$ AU. Planeetan massa on

$$m = \frac{Ma'}{a - a'} = \frac{0.135 \times 0.047}{4.4 - 0.047} M_{\odot} = 0.0015 M_{\odot}$$

eli noin puolitoista Jupiteria.



10 Tähtien rakenne

- 10.1 a) Protonin massa on $m_p = 1.6725 \times 10^{-27}$ kg ja heliumytimen $m_{\text{He}} = 6.6441 \times 10^{-27}$ kg, joten massakato on

$$\Delta m = 4m_p - m_{\text{He}} = 4.6 \times 10^{-29} \text{ kg.}$$

Tämä vastaa energiaa

$$\begin{aligned} E &= \Delta mc^2 = 4.6 \times 10^{-29} \text{ kg} \times (3.0 \times 10^8 \text{ m s}^{-1})^2 \\ &= 4.1 \times 10^{-12} \text{ J.} \end{aligned}$$

- b) Hiiliatomin ^{12}C massa on 1.992×10^{-26} kg ja heliumatomin ^4He 6.6459×10^{-27} kg. Koska kolmessa heliumatomissa on yhtä monta elektronia (6) kuin yhdessä hiiliatomissa, on massakato

$$\begin{aligned} \Delta m &= 3m_\alpha - m_{\text{C-ioni}} = 3m_{\text{He}} - m_{\text{C}} \\ &= 1.8 \times 10^{-29} \text{ kg,} \end{aligned}$$

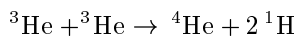
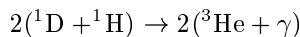
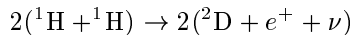
mikä vastaa energiaa 1.6×10^{-12} J.

- c) Piiatomin ^{28}Si massa on $m_{\text{Si}} = 4.645 \times 10^{-26}$ kg ja rauta-atomien ^{56}Fe $m_{\text{Fe}} = 9.288 \times 10^{-26}$ kg. Koska kahdessa piiatomissa on kaksi elektronia enemmän kuin rauta-atomissa, saadaan täysin ionisoituneiden ydinten yhtyessä massakadoksi

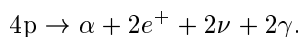
$$\begin{aligned} \Delta m &= 2m_{\text{Si-ioni}} - m_{\text{Fe-ioni}} = 2m_{\text{Si}} - m_{\text{Fe}} - 2m_e \\ &= 1.8 \times 10^{-29} \text{ kg.} \end{aligned}$$

Syntyvä energia on 1.6×10^{-12} J. (Kohdissa b) ja c) on jätetty elektronien sidosenergioista johtuvat vähäiset massaerot huomiotta.)

- 10.2 a) pp-ketjussa tapahtuu seuraavat reaktiot:



Kaiken kaikkiaan siis tapahtuu prosessi



Tässä kolme viimeistä termiä edustavat energiaa, joka muodossa tai toisessa poistuu Auringosta. Edellisen tehtävän perusteella massahäviö neljän protonin muuttuessa α -hiukkaseksi on 4.6×10^{-29} kg, ja tässä puuhassa vapautuva energia 4.1×10^{-12} J. Reaktioiden määrä sekunnissa on

$$N_{\text{pp}} = \frac{L_\odot}{\Delta mc^2} = \frac{3.9 \times 10^{26} \text{ W}}{4.1 \times 10^{-12} \text{ J}} \approx 9.5 \times 10^{37} \text{ s}^{-1}.$$



b) Neutriinoja syntyy nopeudella $N_\nu = 2N_{pp} = 1.9 \times 10^{38}$ kappaletta sekunnissa. Neutriinovuon tiheys maapallon etäisyydellä on

$$S_\nu = \frac{N_\nu}{4\pi r^2} \approx 7 \times 10^{14} \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-1}.$$

Neliömillimetrin alueella osuu sekunnissa noin 700 miljoonaa neutriinoa. Kaiken kaikkiaan maapalloon osuu noin 9×10^{28} neutriinoa sekunnissa.

10.3 Keskimääräinen vapaa matka on

$$l = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\kappa\rho},$$

missä α on opasiteetti, κ massa-absorptiokerroin ja ρ tiheys. Aurion keskustan tiheys on $1.6 \times 10^5 \text{ kg m}^{-3}$, joten

$$l = \frac{1}{10^{-21} \text{ m}^2 \text{ kg}^{-1} \times 1.6 \times 10^5 \text{ kg m}^{-3}} \\ \approx 5 \times 10^{15} \text{ m} \approx 42\,000 \text{ AU}.$$

Neutriinolla ei siis ole juuri toiveita joutua absorboitua ennen joutumistaan kolkoon avaruuteen.

10.4 Lasketaan aluksi massajakautuma massajatkuvuusyhtälöstä:

$$\frac{dM(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r) = \frac{4\pi\rho_0}{R^2} (r^4 - 2Rr^3 + R^2r^2)$$

Tämä on helppo integroida:

$$M(r) = \frac{4\pi\rho_0}{R^2} \left(\frac{r^5}{5} - \frac{Rr^4}{2} + \frac{R^2r^3}{3} \right) + M_0.$$

Koska keskipisteessä täytyy olla $M(0) = 0$, on integroimisvakio $M_0 = 0$. Kaikki massa on säteen R sisäpuolella, $M(R) = M$, joten voimme myös laskea vakion ρ_0 :

$$M(R) = \frac{4\pi\rho_0}{R^2} \left(\frac{R^5}{5} - \frac{R^5}{2} + \frac{R^5}{3} \right) = \frac{2\pi\rho_0 R^3}{15},$$

josta

$$\rho_0 = \frac{15M}{2\pi R^3}.$$

Nyt voimme laskea painejakautuman hydrostaattisen tasapainon yhtälöstä:

$$\frac{dP(r)}{dr} = -\frac{GM(r)\rho(r)}{r^2}.$$

Sijoittamalla tähän massan ja tiheyden lausekkeet ja siistimällä mitä siistittävässä on saamme

$$dP = -\frac{4\pi G \rho_0^2}{R^4} \times \\ \left(\frac{1}{5}r^5 - \frac{9}{10}Rr^4 + \frac{23}{15}R^2r^3 - \frac{7}{6}R^3r^2 + \frac{1}{3}R^4r \right) dr.$$

Tämänkin integrointi on lasten leikkiä:

$$P(r) = -\frac{4\pi G \rho_0^2}{R^4} \left(\frac{1}{30} r^6 - \frac{9}{50} R r^5 + \frac{23}{60} R^2 r^4 - \frac{7}{18} R^3 r^3 + \frac{1}{6} R^4 r^2 \right) + P_0.$$

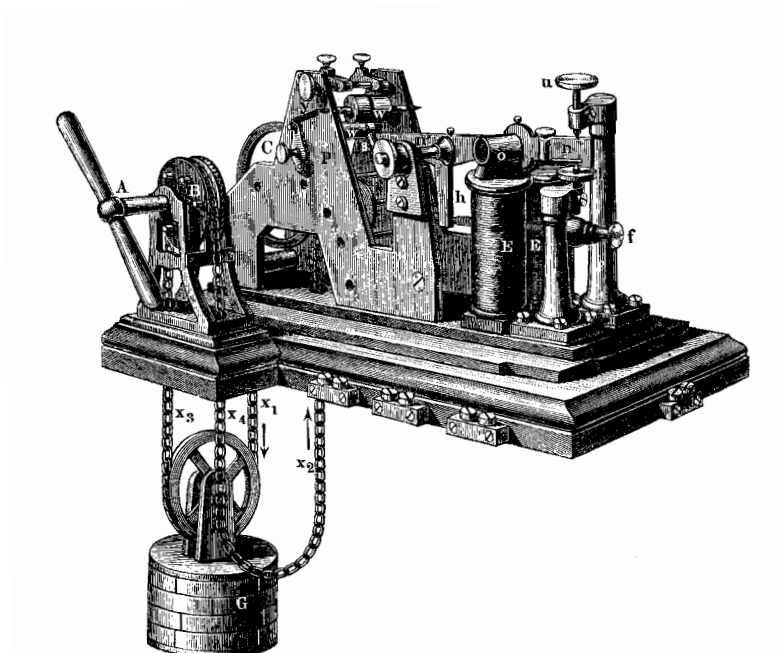
Integroimisvakio saadaan reunaehdosta $P(R) = 0$:

$$\begin{aligned} P(R) &= -\frac{4\pi G}{R^4} \left(\frac{15M}{2\pi R^3} \right)^2 \times \\ &\quad \left(\frac{1}{30} - \frac{9}{50} + \frac{23}{60} - \frac{7}{18} + \frac{1}{6} \right) R^6 + P_0 \\ &= -\frac{13}{4} \frac{GM^2}{\pi R^4} + P_0 = 0, \end{aligned}$$

josta

$$P_0 = \frac{13}{4} \frac{GM^2}{\pi R^4}.$$

Todellisuudessa tiheysjakautumaa ei tietenkään tiedetä etukäteen, vaan se on ratkaistava samanaikaisesti tähden muiden ominaisuuksien kanssa. Mitä tästä sitten opimme? No emme juuri mitään, mutta tulipahan harjoiteltua polynomien integrointia.



11 Tähtien kehitys

11.1 Vety molekyylin massa on

$$m_{\text{H}_2} = 2 \times 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg.}$$

Näitä on kuutiometrissä 3×10^9 kappaletta, joten tiheys on

$$\begin{aligned} \rho &= 3 \times 10^9 \text{ m}^{-3} \times 2 \times 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg} \\ &= 1.00 \times 10^{-17} \text{ kg m}^{-3}. \end{aligned}$$

Vapaan kutistumisen aikaskaala on

$$\begin{aligned} t_{\text{ff}} &= \pi \sqrt{\frac{(R/2)^3}{GM}} = \sqrt{\frac{\pi^2}{8} \frac{1}{G} \frac{1}{\frac{4}{3}\pi\rho}} \\ &= \sqrt{\frac{3\pi}{32} \frac{1}{G\rho}} = 2.10 \times 10^{13} \text{ s} = 6.7 \times 10^5 \text{ a.} \end{aligned}$$

Tässä ajassa siis kaikki pilvet olisivat kutistuneet kasaan. Massaa muuttuu tähdeksi nopeudella

$$\frac{0.1 \times 100 \times 5 \times 10^4 M_{\odot}}{t_{\text{ff}}} = \frac{5 \times 10^5 M_{\odot}}{6.7 \times 10^5 \text{ a}} = 0.75 M_{\odot} \text{ a}^{-1}.$$

11.2 Terminen aikaskaala on likimain (kaava (11.3))

$$\begin{aligned} t_t &\approx \frac{(M/M_{\odot})^2}{(R/R_{\odot})(L/L_{\odot})} \times 2 \times 10^7 \text{ a} \\ &= \frac{2^2}{3 \times 60} \times 2 \times 10^7 \text{ a} \approx 400\,000 \text{ a.} \end{aligned}$$

Ydinaikaskaala puolestaan on

$$t_n \approx \frac{M/M_{\odot}}{L/L_{\odot}} \times 10^{10} \text{ a} = \frac{2}{60} \times 10^{10} \text{ a} \approx 3 \times 10^8 \text{ a.}$$

11.3 Olkoon tähden vetyvarasto M , pääsarjavaiheen kesto T_0 ja luminositeetti L_0 , sekä jättiläisvaiheen kesto T . Jättiläisvaiheen aikana luminositeetiksi oletettiin $L = 100L_0$. Tähti ei polta kaikkea vetyään, vaan vain osan $x \approx 0.007$. Näillä eväillä saamme

$$\begin{aligned} L_0 T_0 &= 0.1 x M c^2, \\ L T &= 0.9 x M c^2, \end{aligned}$$

josta

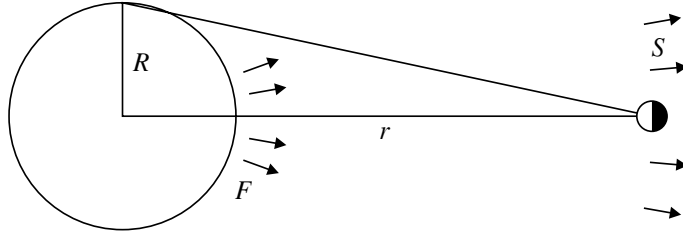
$$T = \frac{9L_0 T_0}{L} = 0.09 T_0 = 9 \times 10^8 \text{ a.}$$

Jättiläisvaihe kestää siis vain noin 900 miljoonaa vuotta.



12 Aurinko

12.1



Olkoon vuontiheys Auringon pinnalla F ja maapallon etäisyydellä S . Aurinko näkyy $32'$ kulmassa, joten

$$\frac{R}{r} = 16' = 4.65 \times 10^{-3} \text{ rad.}$$

Koska energia säilyy, on $4\pi R^2 F = 4\pi r^2 S$, joten

$$\begin{aligned} F &= \left(\frac{r}{R}\right)^2 S = \frac{S}{(R/r)^2} \\ &= \frac{1390 \text{ W m}^{-2}}{0.00465^3} = 6.42 \times 10^7 \text{ W m}^{-2} \approx 64 \text{ MW m}^{-2}. \end{aligned}$$

Niinpä 1000 megawattia saadaan $1000/64 = 16$ neliömetrin alalta.

12.2 Maapallon pinta-ala on

$$4\pi R_{\oplus}^2 = 4\pi(6.37 \times 10^6 \text{ m})^2 = 5.10 \times 10^{14} \text{ m}^2,$$

jolle mahtuu

$$\frac{5.10 \times 10^{14}}{50000} = 1.02 \times 10^{10}$$

ydinvoimala-aluetta. Nämä tuottavat tehoa yhteensä 2.9×10^{19} wattia. Koska Auringon luminositeetti on $3.9 \times 10^{26} \text{ W}$, tarvittaisiin täyteen rakennettuja maapalloja liki 14 miljoonaa kappaletta.

12.3 Olkoon Auringon luminositeetti ammoisina aikoina L , säde R ja efektiivinen lämpötila T . Vastaavat suureet tällä hetkellä olkoot L_{\odot} , R_{\odot} ja T_{\odot} . Koska luminositeetti on $L = 4\pi\sigma R^2 T^4$, luminositeettien suhde on

$$\frac{L}{L_{\odot}} = \frac{4\pi\sigma R^2 T^4}{4\pi\sigma R_{\odot}^2 T_{\odot}^4} = (1.02)^2 \left(\frac{5000}{5785}\right)^4 = 0.58.$$

Aurinkovakio on suoraan verrannollinen Auringon luminositeettiin, joten se olisi ollut

$$S = 0.58 \times 1390 \text{ W m}^{-2} = 807 \text{ W m}^{-2}.$$

12.4 Pilkkuluku on

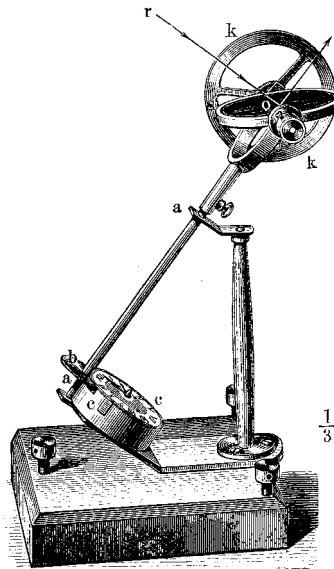
$$Z = C(S + 10G),$$

missä S on yksittäisten pilkkujen ja G pilkkuryhmien lukumäärä. Kerroin C on havaittajasta riippuva vakio, joka tässä oletettiin ykköseksi. Kuvassa näkynee suunnilleen 14 pilkkua ja 4 pilkkuryhmää, joten pilkkuluvuksi saadaan noin $Z = 54$.

12.5 Lasketaanpa aluksi, mikä olisi tällaisen planeetan radan säde. Kiertoajan on oltava suunnilleen Auringon pyöriähdysaika, noin 25 vuorokautta eli 0.07 vuotta:

$$a = P^{2/3} = 0.17 \text{ AU} = 36R_{\odot}.$$

Tämä on hieman alle puolet Merkuriuksen radan säteestä, joten tällaisia planeettoja olisi hyvin vaikea havaita muulloin kuin niiden kulkiessa Auringon editse. Riittävän tarkkoilla havainnoilla voitaisiin havaita niiden liikkuvan Auringon editse pitkin ratoja, joiden taso kulkee Auringon keskipisteen kautta. Pilkkujen liike puolestaan on Auringon ekvaattorin suuntaista.



13 Muuttuvat tähdet

- 13.1 Kefeidien absoluuttisen magnitudin ja periodin välillä on voimassa periodi-luminositeetti-relaatio:

$$M_V = -1.6 - 2.6 \lg \frac{P}{1 \text{ d}}.$$

Tästä saadaan δ Cephein absoluuttiseksi magnitudiksi $M_V = -3.50$. Näennäinen magnitudi on keskimäärin 4.15, joten etäisyys on $r \approx 340$ pc.

- 13.2 Etäisyyden suhteellisella virheellä tarkoitetaan suuretta $\Delta r/r$. Jos erotukset Δr ja ΔM eivät ole kovin suuria, voimme arvioida niitä differentiaaleilla dr ja dM .

$$\begin{aligned} r &= 10 \text{ pc} \times 10^{0.2(m-M)} \\ \Rightarrow \frac{dr}{dM} &= 10 \text{ pc} \times 10^{0.2(m-M)} (-0.2) \ln 10 \\ \Rightarrow dr &= 10 \text{ pc} \times 10^{0.2(m-M)} (-0.2) (\ln 10) dM \\ \Rightarrow \frac{dr}{r} &= -0.2 (\ln 10) dM = -0.46 dM. \end{aligned}$$

Jos $dM = 0.3$, on $dr/r = 0.14$.

- 13.3 Tähtien luminositeetti maksimissa ja minimissä on

$$\begin{aligned} L_{\max} &= 4\pi R_{\max}^2 \sigma T_{\max}^4, \\ L_{\min} &= 4\pi R_{\min}^2 \sigma T_{\min}^4. \end{aligned}$$

Koska kysymyksessä on sama tähti, näennäisen ja absoluuttisen magnitudin muutos on sama, joten

$$\begin{aligned} \Delta m &= -2.5 \lg \frac{L_{\min}}{L_{\max}} = -2.5 \lg \frac{4\pi R_{\min}^2 \sigma T_{\min}^4}{4\pi R_{\max}^2 \sigma T_{\max}^4} \\ &= -5 \lg \frac{R_{\min}}{R_{\max}} - 10 \lg \frac{T_{\min}}{T_{\max}}. \end{aligned}$$

Jos magnitudin vaihtelu johtuu pelkästään lämpötilan muutoksesta, on

$$1 = \Delta m = -10 \lg \frac{T_{\min}}{T_{\max}},$$

josta

$$\begin{aligned} \frac{T_{\min}}{T_{\max}} &= 10^{-0.1} = 0.794 \\ \Rightarrow T_{\min} &= 4500 \text{ K} \times 0.794 \approx 3570 \text{ K}. \end{aligned}$$

Jos taas vaihtelu johtuu säteen muutoksesta, on

$$1 = -5 \lg \frac{R_{\min}}{R_{\max}} \Rightarrow \frac{R_{\min}}{R_{\max}} = 0.63.$$

13.4 a) Tehtävän 5.7 mukaan näkyvän valon osuus on

$$\frac{15}{\pi^4} (f(b) - f(a)),$$

missä

$$f(x) = e^{-x} (x^3 + 3x^2 + 6x + 6), \quad a = \frac{hc}{\lambda_1 kT}, \quad b = \frac{hc}{\lambda_2 kT}.$$

Kun $T = 2000$ K, on $a = 17.985$ ja $b = 7.993$, $f(a) = 0.000107$ ja $f(b) = 0.2554$. Koko säteilystä tulee näkyvänä valona osa 0.039 (3.9%).

b) Jos visuaaliluminositeetti kasvaa s -kertaiseksi ja tämä johtuu pelkästään lämpötilan muutoksesta $T \rightarrow T'$, on

$$\begin{aligned} L_V &= \frac{2k^4 T'^4}{h^3 c^2} \left(f\left(\frac{hc}{\lambda_2 kT'}\right) - f\left(\frac{hc}{\lambda_1 kT'}\right) \right) \\ &= s \frac{2k^4 T^4}{h^3 c^2} \left(f\left(\frac{hc}{\lambda_2 kT}\right) - f\left(\frac{hc}{\lambda_1 kT}\right) \right). \end{aligned}$$

Tästä saadaan yhtälö T' :lle:

$$\left(\frac{T}{T'}\right)^4 = \frac{1}{ts} \left(f\left(\frac{hc}{\lambda_2 kT'}\right) - f\left(\frac{hc}{\lambda_1 kT'}\right) \right),$$

missä

$$t = f\left(\frac{hc}{\lambda_2 kT}\right) - f\left(\frac{hc}{\lambda_1 kT}\right)$$

on pelkästään alkuperäisestä lämpötilasta riippuva vakio. Jos tähti kirkastuu 6 magnitudia, täytyy sen luminositeetin kasvaa noin 250-kertaiseksi, ts. $s = 250$. Edelleen $t = 0.2554 - 0.000107 = 0.2553$, joten $1/ts = 0.0157$. Voimme yrittää ratkaista T' :n esimerkiksi iteroimalla. Arvataan jokin lähtöarvo, vaikkapa $T' = 4000$ K, lasketaan sen avulla yhtälön oikea puoli ja ratkaistaan uusi arvo T' :lle. Näin laskien konvergoivat lämpötilan arvot kohti 4370 Kelviniä. Wienin siirtymälaista näemme, että tällaisessa lämpötilassa säteilymaksimin aallonpituus on noin 600 nm eli juuri visuaalialueessa. Käyttämämme approksimaatio ei siis päde, eikä saatua tulosta voi ottaa kovin vakavasti. Tarkkaa arvoa varten on laskettava visuaaliluminositeetti integroimalla Planckin funktio visuaalialueen yli käyttämällä eri lämpötiloja. Näistä voidaan sitten valita lähinnä haluttua luminositeettia oleva. Pelkästään taskulaskimella aseistautuneena tähän puuhaan ei juuri huvita ryhtyä.

Tietokoneen avulla laskut sujuvat tietenkin tuossa tuokiossa. Teh-

tävänä on siis ratkaista T' yhtälöstä

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{d\lambda}{e^{hc/\lambda kT'} - 1} = s \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{d\lambda}{e^{hc/\lambda kT} - 1},$$

missä nyt $\lambda_1 = 400$ nm, $\lambda_2 = 700$ nm, $s = 250$ ja $T = 2000$ K. Ratkaisuksi saadaan $T' = 3690$ K.

Ratkaisimme yhtälön täsmällisesti tai emme, näemme kuitenkin, että näin suurta kirkkaudenvaihtelua varten tarvittaisiin huomattavan suuria lämpötilan vaihteluita, joten ne tuskin yksinään riittävät ilmiön selitykseksi.

- 13.5 a) Laajenemisnopeus on $\mu = 0.21'' \text{ a}^{-1} = 3.226 \times 10^{-14} \text{ rad s}^{-1}$. Nopeus on $v = \mu r = 1300 \text{ km s}^{-1}$, joten etäisyys on

$$r = \frac{1300 \times 10^3 \text{ m s}^{-1}}{3.226 \times 10^{-14} \text{ s}^{-1}} = 4.03 \times 10^{19} \text{ m} \approx 1300 \text{ pc}.$$

b) Säte on $3'$ ja kasvaa $0.21''$ vuodessa, joten sumu on aloittanut laajenemisensa $3'/0.21'' = 857$ vuotta sitten eli vuonna $1983 - 857 = 1126$. Koska μ :n tarkkuus on luokkaa 10 %, aika-arvion virhe on luokkaa 100 vuotta. Voimme siis päätellä räjähdysten tapahtuneen noin 1000–1200. Todellisuudessa tämä supernova havaittiin Kiinassa 4.7.1054. Tiedetään sen näkyneen päivälläkin.

c)

$$m = M + 5 \lg \left(\frac{r}{10 \text{ pc}} \right) = -18 + 5 \lg 130 = -7.4.$$

- 13.6 a) 200 vuodessa leimahtaa $200/40 + 1 = 6$ supernovaa, joten keskimääräinen aikaväli on $T = 200/6 = 33$ vuotta.
b) Edellisestä supernovaräjähdyksestä on kulunut aikaa $t = 1986 - 1604 = 382$ vuotta. Keskimääräinen väliaika on $T = 33.3$ vuotta. Todennäköisyys, että 382 vuoden aikana ei ole räjähtänyt yhtään supernovaa on

$$P(X_t = 0) = e^{-t/T} = e^{-382/33.3} = 1.04 \times 10^{-5}.$$

Todennäköisyys, että tällaisen aikavälin kuluessa räjähtää ainakin yksi supernova on

$$P(X_t \geq 1) = 1 - P(X_t = 0) = 0.9999896.$$

- 13.7 Neutriinon energia standardinmukaisissa yksiköissä on

$$E_\nu = 4.2 \times 10^6 \times 1.6 \times 10^{-19} \text{ J} = 6.7 \times 10^{-13} \text{ J}.$$

Energiamäärä neliometriä kohti on siten

$$E = 1.3 \times 10^{14} \text{ m}^2 \times 6.7 \times 10^{-13} \text{ J} = 87 \text{ J/m}^2.$$

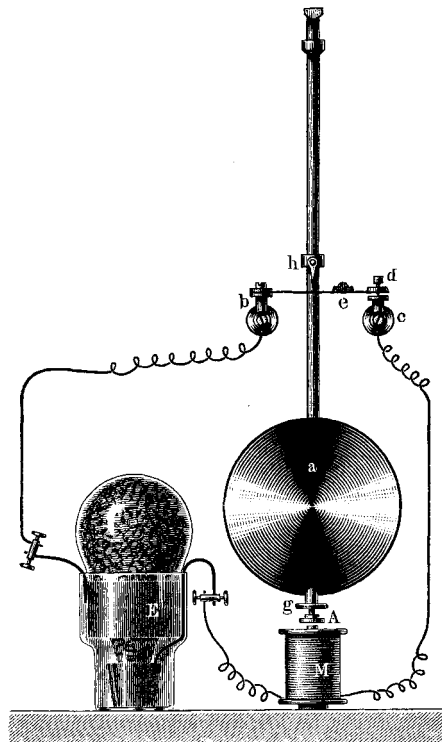
Suuren Magellanin pilven etäisyys r on noin 50 kpc, joten sen sä-



teilemän energian määrä on

$$\begin{aligned} L &= 4\pi r^2 E \\ &= 4\pi(50000 \times 3.1 \times 10^{16} \text{ m})^2 \times 87 \text{ J/m}^2 \\ &= 2.6 \times 10^{45} \text{ J.} \end{aligned}$$

Tämä vastaa suunnilleen sellaista energiaa, jonka Aurinko säteelisi 200 miljardissa vuodessa, mikäli se pystyisi loistamaan niin kauan nykyisellä kirkkaudellaan.



14 Kompaktit tähdet

14.1 a)

$$v = \omega r = \frac{2\pi r}{P} = \frac{2\pi \times 10^4 \text{ m}}{0.0016 \text{ s}} = 3.93 \times 10^7 \text{ m s}^{-1} (= 0.13c!)$$

b) Keskeiskiihtyvyys on $a = v^2/r$ ja gravitaatiokiihtyvyys $g = GM/r^2$, joten

$$\frac{a}{g} = \frac{rv^2}{GM} = \frac{10^4 \times (3.93 \times 10^7)^2}{6.67 \times 10^{-11} \times 2 \times 10^{30}} = 0.12.$$

14.2

$$L = I\omega = \frac{2}{5}MR^2 \frac{2\pi}{P} = 2.3 \times 10^{40} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}.$$

Säteen vaihtelut saadaan impulssimomentin säilymisestä.

Tapa 1: Periodi kasvaa $P_1 = 0.0330 \text{ s} \rightarrow P_2 = 0.0333 \text{ s}$ ja säde muuttuu $R_1 \rightarrow R_2$:

$$L = \frac{4\pi MR_1^2}{5P_1} = \frac{4\pi MR_2^2}{5P_2} \Rightarrow R_2 = R_1 \sqrt{\frac{P_2}{P_1}} = 10.045 \text{ km}.$$

Muutos on siis 45 m.

Tapa 2: Ollaan hienoja ja käytetään differentiaaleja:

$$dL = \frac{8\pi MR dR}{5P} - \frac{4\pi MR^2 dP}{5P^2} = 0$$

\Rightarrow

$$dR = -\frac{R dP}{2P} = -\frac{10 \text{ km}}{2} \frac{0.0003 \text{ s}}{0.033 \text{ s}} = 45 \text{ m}.$$

14.3 a) Ja taas tarvitaan Keplerin kolmatta lakia, josta saadaan

$$GM = \frac{4\pi^2 r^3}{P^2} = \frac{4\pi^2 (4.06 \times 10^5)^3}{0.1993^2} = 6.6516 \times 10^{19} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}.$$

Panemme tämän luvun muistiin, koska tarvitsemme sitä jatkossa. Massa on likimain

$$\frac{6.6516 \times 10^{19}}{66.7 \times 10^{-11}} \text{ kg} \approx 10^{30} \text{ kg} \approx 0.5 M_{\odot}.$$

Vetovoiman kiihtyvyys on

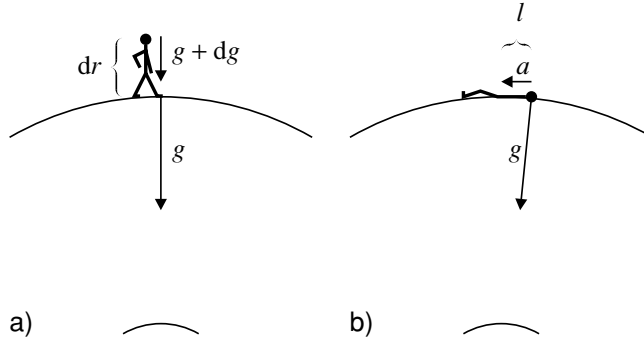
$$\frac{GM}{r^2} = 0.49 \times 10^9 \text{ m s}^{-2} (= 4 \times 10^7 g).$$

b) Vaikka gravitaatiokiihtyvyys onkin aikamoinen, se ei vielä sinänsä aiheuta ongelmia, mikäli se vain kohdistuu samanlaisena



alukseen ja matkustajiin. Oltaessa lähellä kompaktia kohdetta vetovoima muuttuu hyvin nopeasti siirryttäessä paikasta toiseen. Tämä vetovoiman muuttuminen havaitaan vuorovesivoimina, jotka aiheuttavat erilaisia muodonmuutoksia. Matkustajan ollessa jalat tähteä kohti hänen kohdistuu päähänsä pienempi kiihtyvyys kuin jalkoihin. Erotus on

$$dg = dr \frac{d}{dr} \left(\frac{GM}{r^2} \right) = -\frac{2GM}{r^3} dr = -3479 \text{ m s}^{-2}.$$



Vuorovesivoimat pyrkivät siis venyttämään matkustajaa noin $355g$:n voimalla. Jos taas matkustaja lepää pitkän radan tangenttia, on $l/r = a/g$ eli $a = gl/r$ ja matkustajaa kokoon puristava voima on

$$da = 2a = \frac{GM}{r^2} \frac{2l}{r} \approx 177g.$$

Tällaiset vuorovesivoimat on neutronitähtiretkikunnan kompensoitava jollakin tavoin. Tehtävässä mainitussa teoksessa esitetään eräs mahdollinen keino.

14.4

$$\begin{aligned} R_S &= \frac{2GM}{c^2} \Rightarrow M = \frac{R_S c^2}{2G} \\ &= \frac{10^{-14} \times (3 \times 10^8)^2}{2 \times 6.67 \times 10^{-11}} \text{ kg} = 6.7 \times 10^{12} \text{ kg}. \end{aligned}$$

Tämä on 6.7 kuutiokilometrin suuruisen vesimäärän massa. Jos tämä muutetaan kokonaan energiaksi, saadaan $E = Mc^2 = 6 \times 10^{29} \text{ J}$. Auringon luminositeettihan oli $3.9 \times 10^{26} \text{ W}$, joten miniaukon höyrystyessä vapautuu sama määrä energiaa, minkä Aurinko säteilee vajaassa puolessa tunnissa. Ja kaikki tämä on peräisin vain protonin kokoisesta möhkäleestä.

14.5 Koska fotonin energia on $E = h\nu$ ja toisaalta $E = mc^2$, fotonin energia vastaa massaa $m = h\nu/c^2$, jolloin energian säilymislaista saadaan

$$E = h\nu_e - \frac{GM}{R} \frac{h\nu_e}{c^2} = h\nu_0 - \frac{GM}{r} \frac{h\nu_0}{c^2} \rightarrow h\nu_0, \text{ kun } r \rightarrow \infty$$

⇒

$$\nu_0 = \nu_e \left(1 - \frac{GM}{Rc^2} \right)$$

⇒

$$\Delta\nu = \nu_0 - \nu_e = -\frac{GM}{Rc^2} \nu_e.$$

Kun $\Delta\nu/\nu$ on pieni, on $\Delta\nu/\nu \approx -\Delta\lambda/\lambda$, joten

$$\Delta\lambda = \frac{GM}{Rc^2} \lambda_e.$$

Matkalla Auringosta Maahan fotoni punertuu niin ollen määrän

$$\Delta\lambda = \frac{6.67 \times 10^{-11} \times 1.989 \times 10^{30}}{6.96 \times 10^8 \times (3 \times 10^8)^2} \lambda_e = 2.1 \times 10^{-6} \lambda_e.$$

Jos lähtevän fotonin aallonpituus on 550 nm, on muutos 0.0012 nm. Kompaktien kohteiden säteilyä tutkittaessa voidaan joutua käyttämään relativistista kaavaa

$$\nu_0 = \nu_e \sqrt{1 - \frac{2GM}{Rc^2}} = \nu_e \sqrt{1 - \frac{R_S}{R}}.$$

Johtamamme muoto seuraa tästä korvaamalla neliöjuuri Taylorin sarjansa kahdella ensimmäisellä termillä.

- 14.6 Olkoon alempi lamppu korkeudella R ja ylempi korkeudella $R + h$ tähden keskipisteestä. Kaikki lamput loistavat taajuudella ν . Äärettömän kaukana oleva havaitsija näkee ylemmän lampun valon taajuudella

$$\nu_0 = \nu \sqrt{1 - \frac{R_S}{R + h}},$$

missä R_S on tähden Schwarzschildin säde. Ylemmän lampun valo näkyy korkeudella R taajuudella ν' . Jos tätä säteilyä heijastetaan takaisin, täytyy taajuuden muuttua takaisin ν :ksi, kun ollaan korkeudella $R + h$ (koska fotonien energian täytyy säilyä). Äärettömän kaukana tämä heijastunut säteily havaitaan samalla taajuudella ν_0 kuin suoraan tullut säteily, joten

$$\nu_0 = \nu' \sqrt{1 - \frac{R_S}{R}}.$$

Nyt voimmekin ratkaista $R + h$:n:

$$R + h = \frac{R}{(R/R_S)(1 - (\nu/\nu')^2) + (\nu/\nu')^2}.$$

Tehtävässä $R/R_S = 1.355$. Jos nyt $\nu = 4.5 \times 10^{14}$ Hz ja $\nu' = 5.5 \times 10^{14}$ Hz, on $R + h = 9700$ m ja $h = 1700$ m. Vähän liian korkea liikennevalotolpaksi. Joka tapauksessa säteilyn taajuuden muutokset ovat tuntuvia.

- 14.7 Tässä nyt sitten oli lähtötietoja vaikka muille jakaa. Itse asiassa ainoa tarpeellinen tieto on säteilyn syntypaikka. Koska säteily on

peräisin $0.8R_S$:n päästä mustan aukon keskustasta, ei se tietenkään pääse ulos aukosta.

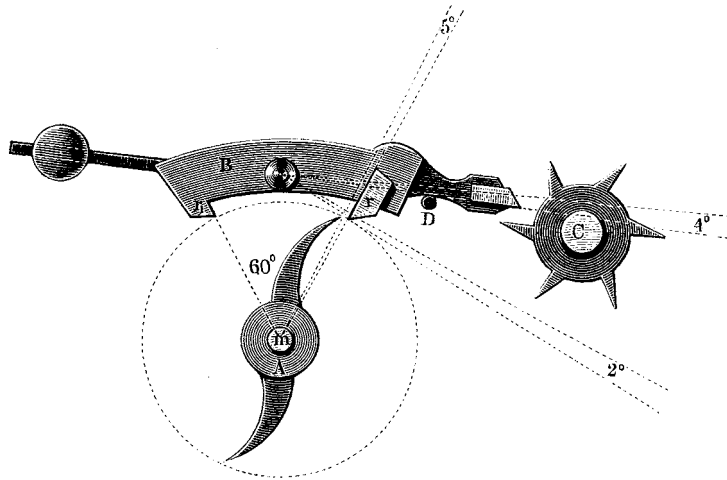
(Asiasta kiinnostuneille kerrottakoon, että pyörivän mustan aukon Schwarzschildin säde on etäisyydellä

$$R_S = \frac{GM}{c^2} + \sqrt{\left(\frac{GM}{c^2}\right)^2 - \left(\frac{L}{Mc}\right)^2}$$

ja ergosfäärin ulkoreuna etäisyydellä

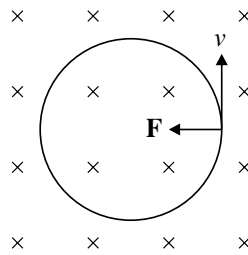
$$R_{\text{stat}} = \frac{GM}{c^2} + \sqrt{\left(\frac{GM}{c^2}\right)^2 - \left(\frac{L}{Mc}\right)^2 \sin^2 \theta},$$

missä L on aukon impulssimomentti ja θ kulmaetäisyys ekvaatorin tasosta. Edelleenkin R_S määrää tapahtumahorisontin, jonka sisäpuolelta säteily ei pääse ulos. Pyörivän aukon R_S on tosin pienempi kuin paikoillaan pysyvän.)



15 Tähtienvälinen aine

- 15.1 Koska kaasua on kylmää ja tiheää, siinä on paljon perustilassa olevia atomeja. Jos fotonin aallonpituus on pienempi kuin Lymanin sarjan ionisaattioraja, 91.18 nm, fotonit ionisoivat atomeja. Myös osa pitempiaaltoisesta säteilystä absorboituu virittäessään atomeja, mutta tämä tapahtuu vain tietyillä diskreeteillä aallonpituuksilla.
- 15.2 Kuvassa magneettikenttä osoittaa katsojasta poispäin.



Koska $\mathbf{v} \perp \mathbf{B}$, on hiukkaseen kohdistuva Lorentzin voima yksinkertaisesti $F = qvB$. Ympyräliikkeessä kiihtyvyyden on

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{F}{m} = \frac{qvB}{m},$$

josta

$$r = \frac{mv}{qB}.$$

Protonin nopeus saadaan sen liike-energiasta: (protonin massa on $m_p = 1.67 \times 10^{-27}$ kg, josta $m_p c^2 = 938.3$ MeV.)

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2} m_p v^2 \Rightarrow \\ v &= \sqrt{\frac{2E_k}{m_p}} = c \sqrt{\frac{2E_k}{m_p c^2}} = c \sqrt{\frac{2}{938.3}} \\ &= 0.0462c = 1.38 \times 10^7 \text{ m s}^{-1} \end{aligned}$$

Magneettivuon tiheys on

$$10^{-10} \text{ T} = 10^{-10} \text{ V s m}^{-1} = 10^{-10} \text{ N C}^{-1} \text{ s m}^{-1},$$

joten

$$\begin{aligned} r &= \frac{1.67 \times 10^{-27} \text{ kg} \times 1.38 \times 10^7 \text{ m s}^{-1}}{1.60 \times 10^{-19} \text{ C} \times 10^{-10} \text{ N C}^{-1} \text{ s m}^{-1}} \\ &= 1.44 \times 10^9 \text{ m} \approx 0.01 \text{ AU}. \end{aligned}$$

15.3 Olkoon kunkin pilvekkeen tiheys ρ_0 . Silloin on

$$\begin{aligned}\langle \rho \rangle &= f\rho_0 + (1-f) \times 0 = f\rho_0, \\ \langle \rho^2 \rangle &= f\rho_0^2 + (1-f) \times 0^2 = f\rho_0^2,\end{aligned}$$

joten

$$\frac{\langle \rho \rangle^2}{\langle \rho^2 \rangle} = \frac{f^2 \rho_0^2}{f\rho_0^2} = f.$$

15.4 Aluksi on laskettava perustilassa olevien molekyylien osuus. Koska molekyyli on aina jossakin tilassa, on

$$\begin{aligned}n_{\text{CO}} &= \sum_{J=0}^{\infty} n_J = \sum_{J=0}^{\infty} n_0 g_J e^{-E_J/kT} \\ &= n_0 \sum_{J=0}^{\infty} (2J+1) e^{-J(J+1)hB/kT}.\end{aligned}$$

Nyt

$$x \equiv \frac{hB}{kT} = \frac{6.625 \times 10^{-34} \times 57.6 \times 10^9}{1.3805 \times 10^{-23} \times 30} = 0.092149 \ll 1,$$

joten perustilaa korkeampienkin tilojen miehitysluvut ovat merkittäviä. Edellä esiintyvää summaa voidaan arvioida integraalilla:

$$\begin{aligned}n_{\text{CO}} &= n_0 \sum_{J=0}^{\infty} (2J+1) e^{-J(J+1)x} \\ &\approx \int_0^{\infty} (2J+1) e^{-J(J+1)x} dJ = \left|_0^{\infty} -\frac{e^{-J(J+1)x}}{x} \right| = \frac{1}{x}.\end{aligned}$$

Molekyyleistä on perustilassa siis osa

$$\frac{n_0}{n_{\text{CO}}} \approx x = 0.09.$$

Tarkasti laskien eri tilojen suhteelliset miehitysluvut $n_J/n_0 = g_J e^{-E_J/kT}$ ovat

J	n_J/n_0
0	1.000
1	2.495
2	2.876
3	2.317
4	1.425
5	0.693
6	0.271
7	0.086
8	0.022
9	0.005
10	0.001
Σ	11.19

Korkeampien tilojen miehitysluvut ovat hyvin pieniä. Taulukon mukaan suhde n_{CO}/n_0 on siis likimain 11.19. Edellä esitetty liikiarvolasku antoi $n_{CO}/n_0 = 1/x = 10.85$.

15.5 Pölyhiukkasen liikeyhtälö on

$$m\ddot{r} = F_{\text{rad}} = \frac{k}{r^2}.$$

Tämä on merkkiä vaille Kepler-liikkeen yhtälö radiaalisuunnassa, ja sama joka vallitsee kahden samanmerkkisen sähkövarauksen välillä. Kertomalla yhtälö puolittain tekijällä \dot{r} saadaan

$$\dot{r}\ddot{r} = \frac{k\dot{r}}{mr^2}$$

eli

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \dot{r}^2 \right) = \frac{d}{dt} \left(-\frac{k}{mr} \right),$$

josta nopeudeksi tulee

$$\dot{r} = \sqrt{2 \left(C - \frac{k}{mr} \right)},$$

missä C on vakio. Vakio määräytyy ehdosta $\dot{r} = 0$, kun $r = r_0$. Tästä saadaan $C = k/mr_0$, joten

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2k}{m} \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} \right)}.$$

Tästä nähdään, että hiukkasen nopeudella on raja-arvo

$$\lim_{r \rightarrow \infty} v = \sqrt{\frac{2k}{mr_0}}.$$

15.6 Merkitään $a = kr$, jolloin saadaan Poissonin jakautuman tiheysfunktion tavanomainen muoto

$$p(n) = \frac{a^n e^{-a}}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Todennäköisyyslaskennasta perillä olevat muistavat, että Poissonin jakautumaa noudattavan satunnaismuuttujan X odotusarvo on $EX = a$ ja varianssi $\sigma^2 X = a$. Koska odotusarvon ja varianssin välillä pätee aina

$$\sigma^2 X = EX^2 - E^2 X,$$

saamme välittömästi $EX^2 = a^2 + a$.

Koska Poissonin jakautuman ominaisuudet eivät liene kaikille tuttuja, todistamme ne tässä ja nyt.

Odotusarvo on

$$\begin{aligned} EX &= \sum_{n=0}^{\infty} np(n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{na^n e^{-a}}{n!} = ae^{-a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= ae^{-a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} = ae^{-a} e^a = a. \end{aligned}$$

Neliön odotusarvo EX^2 on hieman hankalampi laskettava. Sitä varten joudumme turvautumaan pieneen tempputuun. Derivoimme EX :n lausekkeen a :n suhteen:

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{da}{da} = \frac{dEX}{da} = \frac{d}{da} \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{a^n e^{-a}}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n^2 \frac{a^{n-1} e^{-a}}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{a^n e^{-a}}{n!} \\ &= \frac{1}{a} \sum_{n=0}^{\infty} n^2 \frac{a^n e^{-a}}{n!} - EX \\ &= \frac{1}{a} EX^2 - a. \end{aligned}$$

Tästä voimmekin sitten ratkaista EX^2 :n:

$$EX^2 = a^2 + a.$$

Nyt saamme

$$\begin{aligned} \langle E_{B-V} \rangle &= \langle nE_0 \rangle = \langle n \rangle E_0 = krE_0, \\ \langle E_{B-V}^2 \rangle &= \langle (nE_0)^2 \rangle = \langle n^2 \rangle E_0^2 = (k^2 r^2 + kr)E_0^2, \end{aligned}$$

mistä väitös seuraakin.

- 15.7 Taulukon 10.1 mukaan tähden luminositeetti on $L = 21000L_{\odot}$. Jos hiukkanen absorboi kaiken siihen osuvan säteilyn ja jos sen keskimääräinen poikkipinta-ala on A , absorboituva säteilyteho on

$$F_{\text{abs}} = \frac{LA}{4\pi r^2},$$

missä r on tähden etäisyys. Jos hiukkanen on likimain pallomainen ja koko sen pinta säteilee samalla tavoin, mikä on järkevä oletus hyvin pienen hiukkasen tapauksessa, säteilyä lähtee pinta-alalta $4A$. Jos lämpötila on T , lähtevän säteilyn teho on

$$F_{\text{em}} = 4A\sigma T^4.$$

Termodynaamisessa tasapainossa $F_{\text{em}} = F_{\text{abs}}$, joten

$$\begin{aligned} T^4 &= \frac{L}{16\pi\sigma r^2} \\ &= \frac{21000 \times 3.9 \times 10^{26} \text{ W}}{16\pi \times 5.67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2/\text{K}^4 (0.01 \times 3.1 \times 10^{16} \text{ m})^2} \\ &= 29\,900\,000 \text{ K}^4, \end{aligned}$$

josta $T = 74 \text{ K}$.

16 Tähtijoukot ja assosiaatiot

16.1 Jos tähden absoluuttinen magnitudi on $M = 4.79$, kuten Aurin-
golla, sen vuontiheys 10 parsekin etäisyydellä on

$$F = F_0 10^{-0.4M} = F_0 10^{-0.4 \times 4.79} = 0.0121 F_0.$$

Koko joukosta tulevan säteilyn vuontiheys on silloin

$$F_{\text{joukko}} = 1210 F_0.$$

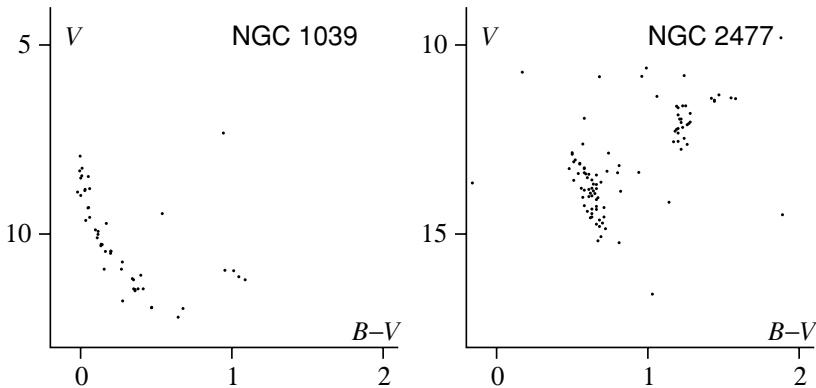
Tästä saadaan joukon absoluuttinen magnitudi

$$M_{\text{joukko}} = -2.5 \lg \frac{F_{\text{joukko}}}{F_0} = -2.5 \lg 1210 = -7.71.$$

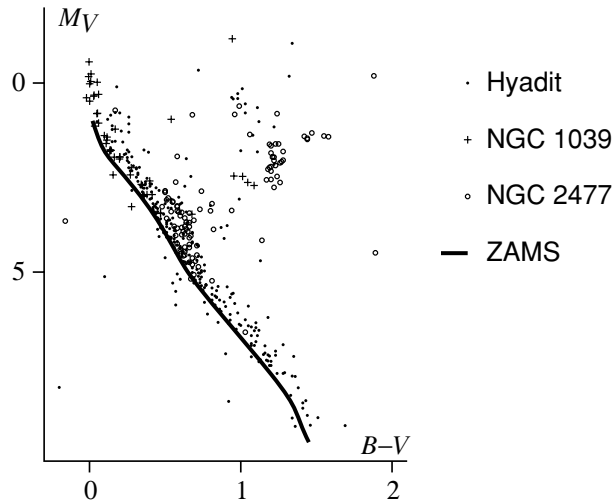
Näennäinen magnitudi on

$$m = M_{\text{joukko}} + 5 \lg \frac{10\,000 \text{ pc}}{10 \text{ pc}} = -7.71 + 15 = 7.3.$$

16.2 a)



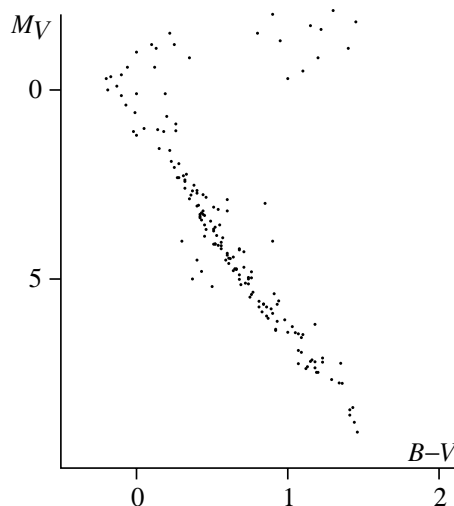
b) Nämä kuvat pitäisi piirtää läpinäkyvälle paperille ja asettaa Hyadien diagramman päälle siten, että kuvien $B - V$ -arvot pysyvät kohdakkain. Diagrammoja siirrellään pystysuunnassa, kunnes joukkojen pääsarjat yhtyvät mahdollisimman hyvin. Kuvaan muodostuu suhteellisen selvä raja, jonka alapuolella tähtiä on hyvin vähän. Tämä vastaa suunnilleen nollaiän pääsarjaa.



Joukkojen iät saadaan selville tutkimalla, missä kohtaa pääsarja kääntyy pois nollaiän pääsarjasta. Mitä kauempana oikealla käännekohta on, sitä vanhempi joukko. Vertaamalla joukkojen HR-diagrammoja oppikirjan kuvaan 17.6 voidaan arvioida, että joukon NGC1039 ikä on korkeintaan 10^9 vuotta ja joukon NGC2477 ikä on noin 10^{10} vuotta.

c) Kun joukkojen diagrammat on asetettu niin, että pääsarjat yhtyvät, luetaan joukon diagrammasta joltakin kohtaa näennäinen magnitudi ja Hyadien diagrammasta vastaavalta kohtaa absoluuttinen magnitudi. Näiden erotuksesta voidaankin laskea joukkojen etäisyydet. Joukolle NGC1039 saamme $m - M \approx 8.5$, josta $r \approx 500$ pc, ja joukolle NGC2477 $m - M \approx 9.5$, $r \approx 800$ pc.

- 16.3 Kuvasta 16.6 nähdään, että 200 miljoonaa vuotta vanhassa joukossa tähdet alkavat poistua pääsarjasta suunnilleen kohdassa $M_V = 0$, $B - V = -0.2$. Tästä alaoikealle pääsarja noudattelee suunnilleen edellä piirrettyä ZAMSia. Lisäksi joukossa voi olla alikäpiöitä hieman pääsarjan alapuolella ja jättiläisiä absoluuttisen magnitudin nolla paikkeilla tai hieman siitä ylöspäin.





17 Linnunrata

- 17.1 a) Jos oletetaan, että Linnunradan massa M on keskittynyt sen keskipisteeseen, ratanopeus R -säteisellä ympyräradalla on

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R}},$$

josta

$$\begin{aligned} M &= \frac{v^2 R}{G} = \frac{(2.20 \times 10^5 \text{ m s}^{-1})^2 \times 8500 \times 3.1 \times 10^{16} \text{ m}}{6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}} \\ &= 1.9 \times 10^{41} \text{ kg} \approx 10^{11} M_{\odot}. \end{aligned}$$

- b) Pakonopeus on $\sqrt{2}$ kertaa ympyräradan ratanopeus:

$$v_e = \sqrt{2} 220 \text{ km s}^{-1} = 311 \text{ km s}^{-1}.$$

- c) Keskeiskiihtyvyys ympyräradalla on

$$\begin{aligned} a &= \frac{v^2}{R} = \frac{(2.20 \times 10^5 \text{ m s}^{-1})^2}{8500 \times 3.1 \times 10^{16} \text{ m}} \\ &= 1.85 \times 10^{-10} \text{ m s}^{-2} = 0.185 \text{ nm s}^{-2}(!). \end{aligned}$$

- 17.2 Massa on ympyräradan ratanopeuden lausekkeena

$$M = \frac{v^2 R}{G}.$$

Tästä saadaan differentioimalla

$$dM = \frac{2vR}{G} dv = 2M \frac{dv}{v}$$

eli

$$\frac{dM}{M} = 2 \frac{dv}{v}.$$

Massan virhe on siis likimain kaksi kertaa niin suuri kuin nopeuden virhe, eli 20 %.

- 17.3 Oortin kaavasta

$$v_r = Ar \sin 2\ell$$

saadaan etäisyydeksi

$$r = \frac{v_r}{A \sin 2\ell} = \frac{-80 \text{ km s}^{-1}}{15 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1} \sin 620^\circ} = 5.4 \text{ kpc}.$$



Tämä on jo niin suuri etäisyys, että Oortin kaavat alkavat olla epäluotettavia. Tehtävässä annettu kuva esittää havaitun rotaatiokäyrän perusteella laskettua nopeuskenttää. Kuvan mukaan radiaalinopeus 5.4 kpc:n etäisyydellä olisi $v_r = -60 \text{ km s}^{-1}$, ja suurempia nopeuksia ei suunnassa $\ell = 310^\circ$ pitäisi esiintyä lainkaan. Kohteella on siis ilmeisesti huomattava pekuliaarinopeus.

- 17.4 a) Kiertoaika saadaan Keplerin kolmannelta laista. Käytetään yksiköinä vuotta, Auringon massa ja AU:ta, jolloin

$$P = \sqrt{\frac{a^3}{M}} = \sqrt{\frac{(15\,000 \times 206\,265)^3}{2 \times 10^{11}}} = 385\,000\,000 \text{ a.}$$

Keplerin toisen lain mukaan liike on hitainta joukon ollessa ratansa kaukaisimmassa päässä. Suurimman osan ajastaan pallomaiset joukot viettävät kaukana Linnunradasta. Satunnaisesti valitulla ajanhetkellä on enemmän hitaasti liikkuvia joukkoja.

- 17.5 Koska Aurinko ja tähti liikkuvat samalla radalla samalla nopeudella, Auringon ja tähden muodostama järjestelmä kiertyy Linnunradan ympäri kuin jäykkä kappale. Taustan suhteen tähti näyttää liikkuvan nopeudella, joka on sama kuin kierto liikkeen kulmanopeus:

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{220\,000 \text{ m s}^{-1}}{8500 \times 3.1 \times 10^{16} \text{ m}} \\ &= 8.4 \times 10^{-17} \text{ rad s}^{-1} = 0.0055'' \text{ a}^{-1}. \end{aligned}$$

- 17.6 Oortin kaava antaa etäisyydeksi

$$r = \frac{v_r}{A \sin 2\ell} = \frac{-80 \text{ km s}^{-1}}{15 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1} \sin 290^\circ} = 5.7 \text{ kpc.}$$

Kefeidin jakso on 3.16 vuorokautta, ja tämän perusteella saadaan periodi-luminositeetti-relaatiosta absoluuttiseksi magnitudiksi $M_V = -2.9$. Koska näennäinen magnitudi on $m_V = 12.3$, on etäisyys

$$r = 10 \text{ pc} \times 10^{0.2(m_V - M_V)} \approx 11 \text{ kpc.}$$

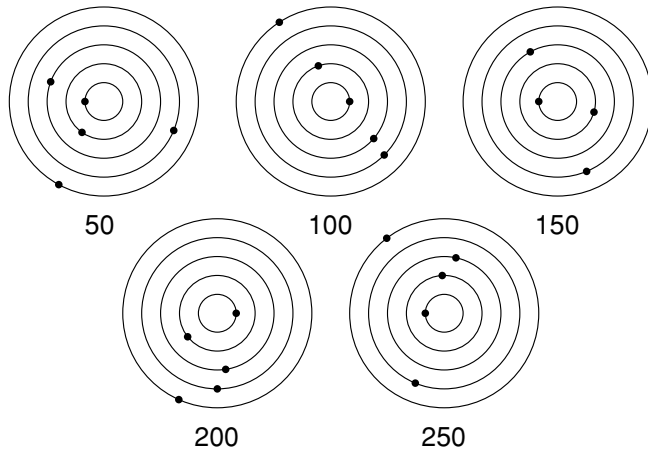
Syynä erilaisiin tuloksiin voivat olla mm.

- Oortin kaavoja käytettäessä pitäisi etäisyyden olla huomattavasti pienempi kuin Auringon etäisyys Linnunradan keskustasta. Esimerkissä etäisyys on niin suuri, että Oortin kaavan johdossa käytetyt approksimaatiot alkavat jo olla huonoja.
- Ekstinktio Linnunradan tasossa näin suurilla etäisyyksillä voi olla jo useita magnitudreja. Jos oletetaan, että $a = 1 \text{ mag kpc}^{-1}$, etäisyydeksi saadaan 2.9 kpc.
- Tähten oma pekuliaarinopeus.

- 17.7 Käyttämällä Keplerin kolmatta lakia saadaan kulmanopeudeksi $\omega(r) = 2\pi\sqrt{m/r^3} \text{ rad a}^{-1}$, missä m on galaksin massa Auringon



massoina ja r astronomisina yksikköinä. Jo 50 miljoonassa vuodessa sisimmät tähdet ovat ehtineet tehdä useita kierroksia, ja spiraalihaara on kadonnut täysin.



- 17.8 a) Kirkkaimmista tähdistä vain kolme (Sirius = α CMa, α Cen, Procyon = α CMi) löytyy myös lähimpien tähtien luettelosta. Kirkkaat tähdet ovat hyvin harvinaisia, mutta näkyvät kauas.
- b) Lähimpien tähtien taulukko ulottuu etäisyydelle $r = 5.13$ pc ja sisältää $n = 56$ tähteä. Canopuksen etäisyys on $R = 60$ pc. Jos tähtitiheys olisi kaikkialla sama, olisi Canopusta lähempänä tähtiä

$$N = \left(\frac{R}{r}\right)^3 n = \left(\frac{60}{5.13}\right)^3 56 \approx 90\,000 \text{ kappaletta.}$$

- c) Lähimmät tähdet ovat enimmäkseen myöhäisen pääsarjan tähtiä, joten emme tee kovin suurta virhettä, jos käytämme niille massa-luminositeetti-relaatiota muodossa

$$\left(\frac{L}{L_{\odot}}\right) = \left(\frac{m}{M_{\odot}}\right)^{4.5}.$$

Tästä saadaan tähden massaksi

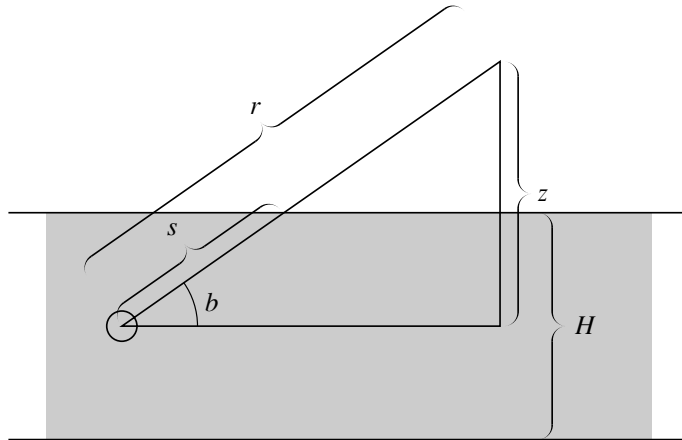
$$m = M_{\odot} \left(\frac{L}{L_{\odot}}\right)^{1/4.5},$$

missä

$$\frac{L}{L_{\odot}} = 10^{-0.4(M - M_{\odot})} \approx 10^{-0.4(M_V - M_{V,\odot})}.$$

Laskemalla tällä tavoin kaikkien lähimpien tähtien taulukon tähtien massat saamme kokonaismassaksi noin $23 M_{\odot}$. Tähdet sijaitsevat pallossa, jonka tilavuus on 570 pc^3 , joten tiheys on $0.04 M_{\odot} \text{ pc}^{-3}$. Jos ajattelemme Linnunradan homogeeniseksi kiekoksi, jonka säde on 15 kpc ja paksuus 1 kpc, saamme sen massaksi noin $3 \times 10^{10} M_{\odot}$.

17.9



Valo joutuu kulkemaan väliaineessa matkan

$$s = \min \left\{ r, \frac{H}{2 \sin b} \right\},$$

joten näennäinen magnitudi on

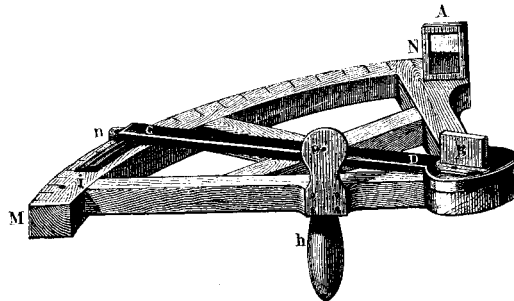
$$m = M + 5 \lg \frac{r}{10 \text{ pc}} + as.$$

Jos kohteen etäisyys on 1 kpc ja leveys $b = 30^\circ$, on $z = 500 \text{ pc}$. Koska ekstinktiota aiheuttavan pölykerroksen paksuus on vain $H = 200 \text{ pc}$, on kohde tämän kerroksen ulkopuolella. Ekstinktiota tapahtuu vain matkalla

$$s = 100 \text{ pc} / \sin b = 200 \text{ pc}.$$

Kohteen näennäinen magnitudi on

$$m = 0 + 5 \lg \frac{1000 \text{ pc}}{10 \text{ pc}} + 1 \text{ mag kpc}^{-1} \times 0.2 \text{ kpc} = 10.2.$$



18 Galaksit

- 18.1 Magnitudia m vastaava vuontiheys on $F(m) = F_0 10^{-0.4m}$, joten kokonaisvuon tiheys on

$$\begin{aligned} F &= \int_{m_0}^{\infty} F(m)n(m) dm = F_0 \int_{m_0}^{\infty} 10^{-0.4m} N e^{am} dm \\ &= F_0 N \int_{m_0}^{\infty} e^{m(-0.4 \ln 10 + a)} dm. \end{aligned}$$

Merkitään $A = 0.4 \ln 10 - a$. Integraali on äärellinen, jos $A > 0$ eli $a < 0.92$.

$$\begin{aligned} F &= F_0 N \int_{m_0}^{\infty} e^{-Am} dm = F_0 N \left[-\frac{e^{-Am}}{A} \right]_{m_0}^{\infty} = \frac{F_0 N}{A} e^{-Am_0} \\ &= F_0 N \frac{10^{-0.4m_0} e^{am_0}}{0.4 \ln 10 - a}. \end{aligned}$$

Kokonaismagnitudi on niin ollen

$$\begin{aligned} m_{\text{kok}} &= -2.5 \lg \left(\frac{F}{F_0} \right) \\ &= -2.5 (\lg N + \lg 10^{-0.4m_0} + \lg e^{am_0} \\ &\quad - \lg(0.4 \ln 10 - a)) \\ &= m_0 (1 - 2.5a \lg e) - 2.5 \lg N + 2.5 \lg(0.4 \ln 10 - a). \end{aligned}$$

- 18.2 Galaksien läpimitat olisivat luokkaa $D = 30$ kpc ja erotuskyvyt $\theta = 2' = 6 \times 10^{-4}$ rad, 7×10^{-7} rad ja 10^{-7} rad, joten etäisyydet ovat $r = D/\theta = 50$ Mpc, 4000 Mpc, 40 000 Mpc ja 300 000 Mpc. Ilmakehän aiheuttaman seeingin vuoksi kahta viimeistä erotuskykyä ei todellisuudessa voi saavuttaa maanpinnalla olevilla teleskoopeilla.
- 18.3 a) Etäisyys on 50 kpc = 163 000 valovuotta. Vuonna 1987 on Magalhãesin havainnosta kulunut 466 vuotta, joten valo on matkanut matkastaan osan $(163\,000 - 466)/163\,000 = 0.997$.
- b) Etäisyyden on oltava vähintään 400 miljoonaa valovuotta eli noin 120 Mpc. Jos $H = 75 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, tällä etäisyydellä olevan galaksin nopeus on noin $75 \times 120 = 9000 \text{ km s}^{-1}$.
- 18.4 a) Luminositeetti on 3.7×10^6 Auringon luminositeettia eli 1.4×10^{33} W.
- b) Oletetaan, että ydin koostuu n :stä m -massaisesta tähdestä. Niiden luminositeetti on silloin

$$L = nL_{\odot} \left(\frac{m}{M_{\odot}} \right)^{3.5}.$$



Tästä saamme tähtien lukumääräksi

$$n = 3.7 \times 10^6 \left(\frac{M_{\odot}}{m} \right)^{3.5}.$$

18.5 Punasiirtymä on

$$z = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0},$$

joten

$$\lambda_0 = \frac{\lambda}{1 + z}.$$

Jos siis havaittu aallonpituus on välillä $\lambda \in [400 \text{ nm}, 700 \text{ nm}]$, lepoaallonpituus on

$$\lambda_0 \in \left[\frac{400 \text{ nm}}{1 + z}, \frac{700 \text{ nm}}{1 + z} \right] = [183 \text{ nm}, 320 \text{ nm}],$$

kun $z = 1.87$. Ollaan ultraviolettialueella. Jos lepoaallonpituus on 656.2 nm, havaittu aallonpituus on 1435 nm eli infrapunaisessa.

18.6 a) Jos galaksit ovat samankokoisia, etäisyyksien suhde on

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{\theta_1}{\theta_2} = \frac{180'}{7'} = 26.$$

b) Absoluuttiset magnitudit ovat samat, M , joten

$$m_1 - M = 5 \lg \frac{r_1}{10 \text{ pc}},$$

$$m_2 - M = 5 \lg \frac{r_2}{10 \text{ pc}},$$

$$m_1 - m_2 = 5 \lg \frac{r_1}{r_2}$$

\Rightarrow

$$\frac{r_2}{r_1} = 10^{(m_2 - m_1)/5} = 10^{(12 - 5)/5} = 25.$$

c) $r_2 = v/H = 2562/75 \text{ Mpc} = 34.2$, josta

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{34.2}{0.69} = 50.$$

18.7 Jos $H = 75 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, etäisyydet ovat 7.5, 10.1, 8, 9.2, 8.6, 9.5, 8.9, 7.9, 10.3 ja 7.7 Mpc. Kullakin galaksijoukon jäsenellä on oma pekuliaarinopeutensa joukon painopisteen suhteen, joten yksittäisen galaksin nopeudesta ei vielä voi laskea etäisyyttä kovin tarkasti. Todennäköisesti parempi arvio saadaan käyttämällä näiden etäisyyksien keskiarvoa 8.8 Mpc.

18.8 Koska massajakautuma on pallosymmetrinen, r -säteisellä ympyräradalla liikkuva tähti noudattaa Keplerin kolmatta lakia

$$P = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{GM(r)}},$$

missä $M(r)$ on säteen r sisäpuolella oleva massa. Tähtien kulmanopeus on

$$\omega(r) = \frac{v(r)}{r} = \frac{2\pi}{P} = \sqrt{\frac{GM(r)}{r^3}}.$$

Tämä ei päde esimerkiksi kiekkomaiselle galaksille, sillä kiekon vetovoimakenttä ei ole sama kuin samanmassaisen pistemäisen tai pallosymmetrisen kappaleen vetovoimakenttä.

a) Tiheys on $\rho(r) = \rho_0 a/r$, joten säteen r sisäpuolella oleva massa on

$$M(r) = \int_0^r 4\pi r^2 \rho(r) dr = 4\pi \rho_0 a \int_0^r r dr = 2\pi \rho_0 a r^2$$

ja kulmanopeus

$$\omega(r) = \sqrt{\frac{2\pi G \rho_0 a r^2}{r^3}} = \frac{\sqrt{2\pi G \rho_0 a}}{\sqrt{r}}.$$

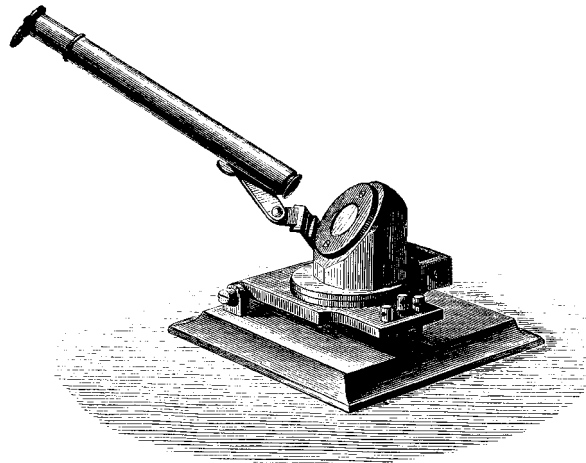
Siis $\omega(r) \propto 1/\sqrt{r}$.

b) Nyt $\rho(r) = \rho_0 a/(a^2 + r^2)$, joten

$$\begin{aligned} M(r) &= 4\pi \rho_0 a \int_0^r \frac{r^2 dr}{a^2 + r^2} \\ &= 4\pi \rho_0 a^2 \int_0^r \left(1 - \frac{a^2}{a^2 + r^2}\right) dr \\ &= 4\pi \rho_0 a^2 \left(r - a \arctan \frac{r}{a}\right) \end{aligned}$$

\Rightarrow

$$\omega(r) = \sqrt{\frac{4\pi G \rho_0 a^2 (r - \arctan(r/a))}{r^3}}.$$



19 Kosmologia

19.1 Etäisyys on

$$r = \frac{v}{H} = \frac{6940 \text{ km s}^{-1}}{75 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}} = 93 \text{ Mpc}.$$

Kulmaläpimitta oli $1.3' = 3.78 \times 10^{-4} \text{ rad}$, josta saadaan todelliseksi läpimitaksi

$$D = 3.78 \times 10^{-4} \times 93 \times 10^6 \text{ pc} = 35 \text{ kpc}.$$

Absoluuttinen magnitudi on

$$M = m - 5 \lg \left(\frac{r}{10 \text{ pc}} \right) = -20.4.$$

Virheitä voi aiheutua ainakin seuraavista asioista:

- Hubbleen ”vakio”: Onko todella vakio? Mikä on sen oikea arvo?
- Galaksin nopeus mahdollisen galaksijoukon suhteen.
- Intergalaktinen ekstinktio.
- Läpimitan arviointitapa (havaitaan vain kolmiulotteisen galaksin projektio; reuna riippuu valitusta rajamagnitudista).

19.2 Vetyatomin massa on $1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$, joten maailmankaikkeuden tiheys vastaa

$$n = \frac{\rho}{m_{\text{H}_2}} \approx 0.60$$

vetyatomia kuutiometrissä. Kuutioparsekillisen massa olisi

$$\begin{aligned} m &= (3.1 \times 10^{16} \text{ m})^3 \times 10^{-27} \text{ kg m}^{-3} \\ &= 2.9 \times 10^{22} \text{ kg} = 0.005 M_{\oplus}. \end{aligned}$$

Tiheys on siis noin maapallo 200 kuutioparsekissa.

19.3 a) Lähempänä olevista joukoista nähdään absoluuttisesti himmeämpiä galakseja kuin kaukaisista. Himmeät galaksit painottaisivat keskiarvoa sitä enemmän mitä lähempänä joukko on. Tällaiselta selektioefektiltä vältytään, kun käytetään joukon kirkkainta (tai muutamaa kirkkainta) galaksia.

b) Jos oletetaan, että vertailtavat galaksit ovat absoluuttisesti yhtä kirkkaita, joukko B on tietenkin kauempana. Etäisyyksien suhde on

$$\frac{r_B}{r_A} = 10^{0.2(m_B - m_A)} = 10.$$



19.4 Tehtävässä 19.2 mainittiin maailmankaikkeuden tunnetun massan tiheydeksi $\rho \approx 10^{-27} \text{ kg m}^{-3}$. Tämä on noin kymmenesosa kriittisestä massasta, joten puuttuvan massan tiheyden pitäisi olla $0.9 \times 10^{-26} \text{ kg m}^{-3}$. Koska kuutiometrissä on 600×10^6 neutriinoa, saadaan neutriinon massaksi $m_\nu = 1.5 \times 10^{-35} \text{ kg}$. Tämä on 0.00002 elektronin massaa.

19.5 Galaksin punasiirtymä on

$$z_1 = \frac{v_r}{c} = \frac{8700 \text{ km s}^{-1}}{300\,000 \text{ km s}^{-1}} = 0.029.$$

ja seuralaisen $z_2 = 0.056$. Jos molemmat galaksit ovat samalla etäisyydellä ja kummankin kosmologinen punasiirtymä on z_1 , seuralaisen kokonaispunasiiirtymälle pätee

$$1 + z_2 = (1 + z_1)(1 + z_g),$$

missä gravitaatiopunasiiirtymä z_g on

$$z_g = \frac{1}{\sqrt{1 - R_S/R}} - 1.$$

(Ks. tehtävä 14.6 ja oppikirjan laatikko 19.3.) Seuralaisgalaksin gravitaatiopunasiiirtymä on

$$z_g = \frac{1.056}{1.029} - 1 = 0.029,$$

josta

$$\frac{R_S}{R} = 1 - \frac{1}{(1 + z_g)^2} = 1 - \frac{1}{1.029^2} = 0.0556.$$

Jos $H = 75 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, kosmologisen punasiirtymän mukainen etäisyys on 116 Mpc. Seuralaisgalaksin säde on siten

$$R = \frac{5''}{3600} \times \frac{\pi}{180} \times 116 \text{ Mpc} = 0.0028 \text{ Mpc},$$

josta

$$R_S = 0.0556R = 0.0556 \times 0.0028 \text{ Mpc} = 156 \text{ pc}.$$

Schwarzschildin säteen lausekkeesta voidaan ratkaista massa

$$\begin{aligned} M &= \frac{R_S c^2}{2G} \\ &= \frac{156 \times 3.1 \times 10^{16} \text{ m} \times (3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1})^2}{2 \times 6.7 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}} \\ &= 3.2 \times 10^{45} \text{ kg} = 1.6 \times 10^{15} M_\odot. \end{aligned}$$

20 Sekalaisia tehtäviä

Elämä maailmankaikkeudessa

20.1 Valitaan satunnaisesti τ Ceti (G8, $r = 3.62$ pc, $M_V = 5.72$, $V = 3.5$). Planeetan etäisyys tähdestä on 10 AU ja tähden etäisyys meistä 3.62 pc = 747 000 AU, joten ollessaan kauimpana tähdestä planeetta näkyy siitä $10/747\,000 = 1.34 \times 10^{-5}$ radiaanin eli $2.76''$ päässä.

Jos tähden ja planeetan ratojen säteet painopisteen suhteen ovat a_* ja a_p , on $a_*/a_p = m_p/m_*$. Koska τ Cetin massa on likimain $1 M_\odot$ ja planeetan massa $1/1000 M_\odot$, on $a_p = 1000a_*$. Koska $a_p + a_* = 10$ AU, on $a_* = 0.01$ AU. Heilahtelun suuruus on $2 \times 0.01/747\,000$ rad eli suunnilleen $0.006''$.

Merkitään d :llä planeetan etäisyyttä tähdestä (= 10 AU), R :llä planeetan sädettä (oletettiin Jupiterin kokoiseksi, joten säde on 71 000 km = 0.000475 AU), R_* :lla tähden sädettä (lienee suunnilleen sama kuin Auringolla, 0.005 AU) ja A :lla Bondin albedoa (= 0.73). Valaistuna näkyvä pinta-ala on $\frac{1}{2}R^2(1 + \cos \alpha)$, missä α on vaihekulma. Vaihefunktio Φ on verrannollinen tähän pinta-alaan normitettuna siten, että $\Phi(0^\circ) = 1$, joten $\Phi(\alpha) = \frac{1}{2}(1 + \cos \alpha)$. Tästä saadaan vaihteintegraali

$$q = 2 \int_0^\pi \Phi(\alpha) \sin \alpha \, d\alpha = \int_0^\pi (\sin \alpha + \sin \alpha \cos \alpha) \, d\alpha = 2.$$

Normitusvakio C on nyt $4/q = 2$. Planeetan heijastaman vuon tiheys maapallolla on

$$F_p = \frac{C\Phi(\alpha)}{4\pi r^2} A F_* \frac{R_*^2}{d^2} \pi R^2,$$

missä F_* on vuontiheys tähden pinnalla. Tähden havaittu vuontiheys on puolestaan $F = F_*(R_*^2/r^2)$, joten

$$\begin{aligned} \frac{F_p}{F} &= C\Phi(\pi/2)A \frac{R^2}{4d^2} \\ &= \frac{2 \times \frac{1}{2} \times 0.73 \times 0.000475^2}{4 \times 10^2} = 4.1 \times 10^{-10}, \end{aligned}$$

josta

$$V_p - V_* = -2.5 \lg \frac{F_p}{F} = 23.5.$$

Tästä saadaan planeetan magnitudiksi $V_p = 27.0$. Ei siis mikään erityisen helppo havaintokohde.

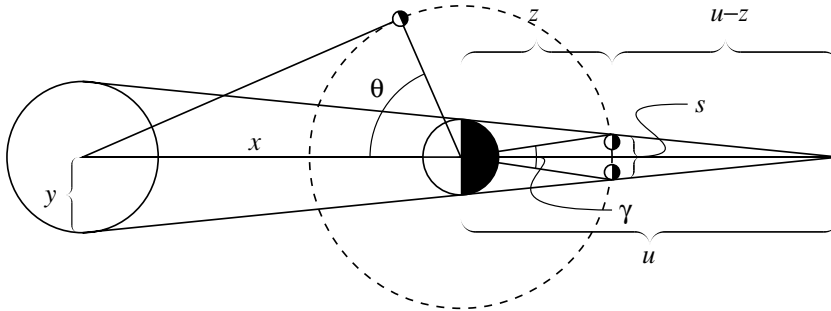
20.3 Jos tilavuuteen V sirotellaan N tähteä, jää kullekin elintilaa V/N . Kahden naapuruksen välimatka on likimain sama kuin tällaisen



lokeron sivun pituus eli $\sqrt[3]{V/N}$. Jos tähtitiheys on n tähteä kuutioparsekissa ja näistä kelpuutetaan vain osa p , on välimatka luonnollisesti $1/\sqrt[3]{pn}$. Jos kaksin- ja moninkertaiset tähdet lasketaan yhdeksi kohteeksi, lähimpien tähtien luettelosta löytyy 43 tähteä. Ne sijaitsevat 5.13 pc -säteisen pallon sisäpuolella ja vievät siis tilavuuden 566 pc^3 . Tästä saadaan tähtitiheydeksi $0.076 \star \text{ pc}^{-3}$. p :n arvoja 10^{-8} , 10^{-5} , 10^{-2} ja 1 vastaavat etäisyydet ovat likimain 1 kpc, 100 pc, 10 pc ja 2.4 pc.

Historia

20.3



Kuvasta nähdään, että Auringon ja Kuun etäisyyksien suhde on

$$\frac{a}{r} = \frac{x}{z} = \frac{1}{\cos \theta} = \frac{1}{\cos 87^\circ} = 19.$$

Aristarkhoksen mielestä Aurinko oli siis noin 19 kertaa niin kaukana kuin Kuu. Jos käytetään oikeampaa arvoa $\theta = 89^\circ 51'$, saadaan suhteeksi 382.

Lasketaan sitten etäisyyksien absoluuttiset arvot. Käytetään seuraavia merkintöjä:

- Auringon etäisyys $a = xR_\oplus$,
- Auringon säde $R_\odot = yR_\oplus$,
- Kulma, jossa Auringon säde näkyy, α ,
- Kuun etäisyys $r = zR_\oplus$,
- Kuun säde $R_M = tR_\oplus$,
- Kulma, jossa Kuun säde näkyy Maasta, β ,
- puolikuun kulmaetäisyys Auringosta, θ ,
- $k = \cos \theta$,
- Maan varjon läpimitta Kuun etäisyydellä sR_\oplus ,
- Kulma, jossa em. läpimitta näkyy Maan keskipisteestä, γ ,
- Maan varjon pituus uR_\oplus .

Havaintojen perusteella tunnemme seuraavat kulmat:

- $\alpha = 32'/2 = 0.00465 \text{ rad}$,
- $\beta = 31'/2 = 0.00451 \text{ rad}$,
- $\gamma = (1 \text{ h } 40 \text{ min} / 29.53 \text{ d}) \times 360^\circ + 31' = 1.36^\circ = 0.0238 \text{ rad}$,
- $\theta = 89^\circ 51'$,

Kuvan geometriaa tutkimalla saamme yhtälöt:

$$y = \alpha x,$$

$$t = \beta z,$$

$$z = kx,$$

$$\frac{y}{1} = \frac{x+u}{u},$$

$$\frac{2}{s} = \frac{u}{u-z},$$

$$s = \gamma z.$$

Tässä on kuusi yhtälöä ja kuusi tuntematonta. Voimme ratkaista niistä haluamamme suhteet:

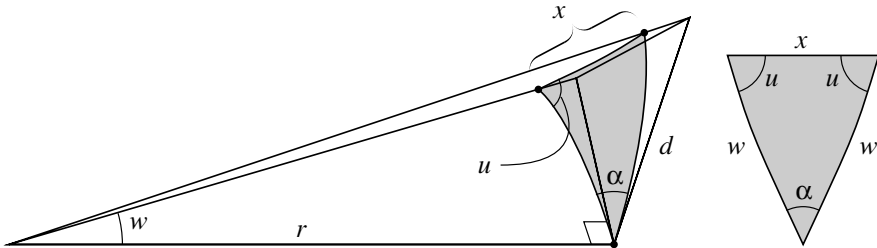
$$a = \frac{2(1+k)}{k(2\alpha+\gamma)} R_{\oplus} \approx 23\,000 R_{\oplus} (= 150 \times 10^6 \text{ km}),$$

$$R_{\odot} = \frac{2\alpha(1+k)}{k(2\alpha+\gamma)} R_{\oplus} \approx 110 R_{\oplus} (= 690\,000 \text{ km}),$$

$$r = \frac{2(1+k)}{2\alpha+\gamma} R_{\oplus} \approx 61 R_{\oplus} (= 390\,000 \text{ km}),$$

$$R_Q = \frac{2\beta(1+k)}{2\alpha+\gamma} R_{\oplus} \approx 0.27 R_{\oplus} (= 1700 \text{ km}).$$

- 20.4 Todistetaan aluksi tehtävässä esitetty lause. Tarkastellaan r -säteisen pallon ympärille piirrettyä säännöllistä n -tahokasta, jonka tahkot ovat säännöllisiä k -kulmioita. Keskipisteestä katsottaessa nähdään nk yhtenevää kolmiota, joista kukin peittää avaruuskulman $\omega = 4\pi/nk$. Kolmion projektio pallon pinnalla on pallokolmio, joten sen pinta-ala on Er^2 , missä E on palloeksessi.



Merkitään $s = d/r$ ja $w = \arctan s$, jolloin

$$\sin^2 w = \frac{s^2}{1+s^2}$$

$$\cos^2 w = \frac{1}{1+s^2}$$

Soveltamalla sini- ja kosinikaavoja pallokolmioon saadaan

$$\cos x = \cos^2 w + \cos \alpha \sin^2 w = \frac{1 + s^2 \cos \alpha}{1 + s^2}$$

$$\frac{\sin u}{\sin w} = \frac{\sin \alpha}{\sin x} \Rightarrow \sin u = \frac{\sin w \sin \alpha}{\sin x},$$

missä

$$\alpha = \frac{2\pi}{k}.$$

Näistä saadaan

$$\sin u = \sin \alpha \frac{s}{\sqrt{1+s^2}} \frac{1}{\sqrt{1 - \left[\frac{1+s^2 \cos \alpha}{1+s^2} \right]^2}}$$

$$= \frac{\sin \alpha \sqrt{1+s^2}}{\sqrt{2(1-\cos \alpha) + s^2 \sin^2 \alpha}}.$$

Toisaalta palloeksessin lausekkeesta

$$E = \alpha + 2u - \pi = 4\pi/nk$$

saadaan

$$\sin u = \sin \left[\frac{1}{2} \left(\frac{4\pi}{nk} + \pi - \alpha \right) \right].$$

Asettamalla nämä $\sin u$:n lausekkeet yhtäsuuriksi voimme ratkaista s :n:

$$s = \frac{d}{r} = \frac{\sqrt{2 \sin^2 u (1 - \cos \alpha) - \sin^2 \alpha}}{\sin \alpha \cos u},$$

missä

$$\alpha = 2\pi/k, \quad u = \frac{1}{2} \left(\frac{4\pi}{nk} + \pi - \alpha \right) = \frac{\pi}{2} \left(\frac{4 + n(k-2)}{nk} \right).$$

Tästä voimmekin ratkaista säteen:

$$r = d f(n, k),$$

missä

$$f(n, k) = \frac{\sin \alpha \cos u}{\sqrt{2 \sin^2 u (1 - \cos \alpha) - \sin^2 \alpha}}$$

$$= \frac{\cos u \cos(\pi/k)}{\sqrt{\sin^2 u - \cos^2(\pi/k)}}.$$

Jos a on monikulmion sivun pituus, on

$$\frac{a}{2} = d \sin \frac{\alpha}{2} = d \sin \frac{\pi}{k},$$

joten

$$r = \frac{a}{2 \sin(\pi/k)} f(n, k).$$

Monitahokkaan ympäripiirretyn pallon säteelle R pätee

$$R^2 = d^2 + r^2 = d^2(1 + f^2),$$

josta

$$R = \frac{a}{2 \sin(\pi/k)} \sqrt{1 + f^2(n, k)}.$$

Näin onkin lause todistettu.

Sovellamme nyt lausettamme kaikkiin säännöllisiin monitahokkai-
siin:

		n	k	α	u	f
tetraedri	(4-särmiö)	4	3	$2\pi/3$	$\pi/3$	$\sqrt{2}/4$
heksaedri	(kuutio)	6	4	$\pi/2$	$\pi/3$	$\sqrt{2}/2$
oktaedri	(8-särmiö)	8	3	$2\pi/3$	$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$
dodekaedri	(12-särmiö)	12	5	$2\pi/5$	$\pi/3$	$(3 + \sqrt{5})/4$
ikosaedri	(20-särmiö)	20	3	$2\pi/3$	$\pi/5$	$\sqrt{14 + 6\sqrt{5}}/4$

Jos nyt merkitään a_n :llä n -tahokkaan särmän pituutta, saadaan edellisen lauseen perusteella sisään- ja ympäripiirrettyjen pallojen säteiksi

tetraedri	$r_4 = \frac{1}{12} a_4 \sqrt{6}$	$R_4 = \frac{1}{4} a_4 \sqrt{6}$
heksaedri	$r_6 = \frac{1}{2} a_6$	$R_6 = \frac{1}{2} a_6 \sqrt{3}$
oktaedri	$r_8 = \frac{1}{6} a_8 \sqrt{6}$	$R_8 = \frac{1}{2} a_8 \sqrt{2}$
dodekaedri	$r_{12} = \frac{1}{20} a_{12} \sqrt{250 + 110\sqrt{5}}$	$R_{12} = \frac{1}{4} a_{12} (\sqrt{15} + \sqrt{3})$
ikosaedri	$r_{20} = \frac{1}{12} a_{20} \sqrt{42 + 18\sqrt{5}}$	$R_{20} = \frac{1}{4} a_{20} \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$

Nämä monitahokkaat pitää nyt sijoittaa planeettojen ratoja vastaavien pallonkuorien väliin seuraavassa järjestyksessä: Merkurius, oktaedri, Venus, ikosaedri, Maa, dodekaedri, Mars, tetraedri, Jupiter, kuutio, Saturnus.

Jos Maan radan säde valitaan yksiköksi, on oltava

$$r_{12} = 1 = R_{20}.$$

Näiden avulla voidaan nyt laskea sisään- ja ympäripiirrettyjen monitahokkaiden särmät a_{12} ja a_{20} . Näistä puolestaan saadaan R_{12}

ja r_{20} . Edelleen täytyy olla

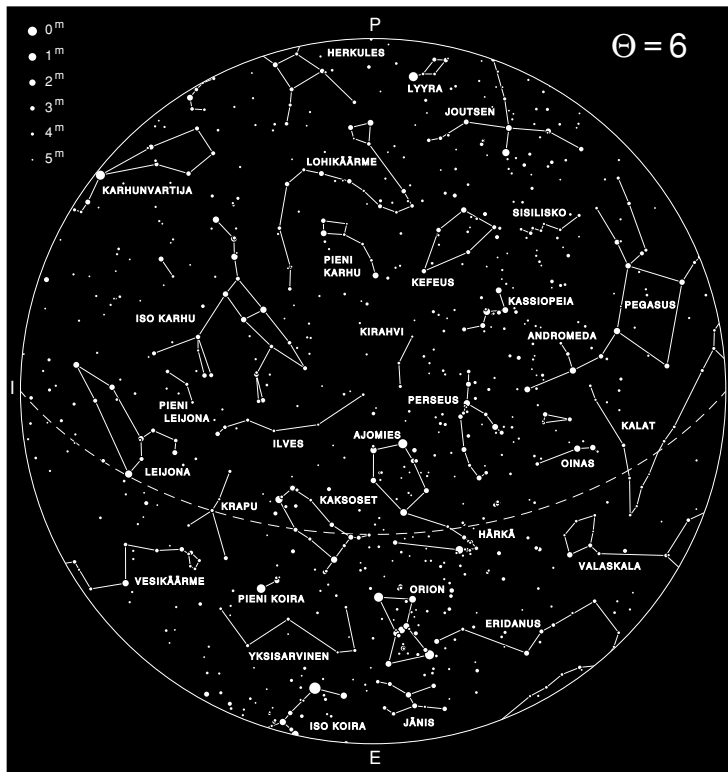
$$r_{20} = R_8, R_{12} = r_4, r_6 = R_4.$$

Näin laskemalla planeettojen säteille saadaan seuraavat arvot (su-
luissa todelliset etäisyydet):

Merkurius	0.459	(0.387)
Venus	0.795	(0.723)
Maa	1.000	(1.000)
Mars	1.258	(1.524)
Jupiter	3.775	(5.203)
Saturnus	6.539	(9.572)

Näemme, että monitahokasmalli ei pysty selittämään planeettojen ratoja. Monitahokkaiden avulla laskettuna kaikki radat olisivat huomattavasti lähempänä toisiaan kuin todellisuudessa.

20.5



Otavan tuntikulma kyseisellä hetkellä lienee noin 18 h, jolloin sen
pystö osoittaa suoraan alas kohti koillista horisonttia. Tähti-
aika on silloin

$$\Theta = \alpha + h \approx 12 \text{ h} + 18 \text{ h} = 30 \text{ h} = 6 \text{ h}.$$

Jos on noustava kuudelta aamulla, neuvo pätee syys-lokakuun tietämissä, jolloin tähtiaika on likimain sama kuin paikallinen aurinkoaika. Aamu aamulta on sitten noustava neljä minuuttia aikaisemmin.

- 20.6 Kesäpäivänseisauksen aikaan Auringon rektaskensio on $\alpha = 6$ h ja deklinaatio $\delta = 23.4^\circ$. Paikkakunnan leveys on noin $\phi = 30^\circ$. Auringon noustessa on

$$\cos h = \cos(\Theta_\odot - \alpha_\odot) = -\tan \delta_\odot \tan \phi,$$

josta voidaan ratkaista tähtiaika $\Theta_\odot = 346^\circ$.

Nyt on sitten etsittävä aika, jolloin Sirius nousee tällä samalla tähtiajan hetkellä. Joudumme laskemaan prekession vaikutuksen Siriuksen paikkaan hyvin pitkällä aikavälillä. Oppikirjassa johdettuja lineaarisia prekessiokaavoja ei voi nyt käyttää. Helpoin (mutta aika työläs) tapa on laskea Siriuksen ekliptikaaliset koordinaatit, korjata sen longitudia, ja laskea uudet ekvatoriaaliset koordinaatit. Menetelmän yksityiskohdat on kuvattu oppikirjan laatikossa 2.1.

Vuonna 2000 Siriuksen ekvatoriaaliset koordinaatit ovat $\alpha = 6$ h 45.1 min, $\delta = -16^\circ 43'$ ja ekliptikaaliset $\lambda = 104.06^\circ$, $\beta = -39.57^\circ$. Koska prekession jakso on noin 26 000 vuotta, on longitudi n vuotta aikaisemmin

$$\lambda' = \lambda - \frac{n}{26\,000} 360^\circ.$$

Tästä voidaan laskea uudet (tai muinaiset) ekvatoriaaliset koordinaatit tutuilla muunnoskaavoilla. Seuraavassa taulukossa on annettu Siriuksen prekessoidut koordinaatit ja nousuhetken tähtiaika muutamille ajanhetkille:

vuosi	α	δ	Θ
0	79°	-16.7°	359°
-1000	68°	-18.2°	349°
-2000	57°	-20.8°	340°
-3000	46°	-24.2°	331°

Näistä voidaankin arvioida, että noin vuonna 1200 ennen ajanlaskumme alkua Sirius nousi samalla hetkellä kuin Aurinko kesäpäivänseisauksen aikoihin.

- 20.7 Tässä tehtävässä joudumme turvautumaan samanlaiseen raakaan työhön kuin edellisessäkin tehtävässä, elleimme halua uppoutua syvällisiin geometrisiin pohdiskeluihin. Otava sisältyy monikulmioon, jonka kärkinä ovat tähdet α , β , γ , ζ ja η . Näiden koordinaatit (vuodelle 1950) löytyvät tehtävästä 2.6. Tällä kertaa tarvitsemme vain deklinaatit. Seuraavassa taulukossa ovat näiden tähtien deklinaatit prekessoituina hamaan menneisyyteen:



vuosi	α	β	γ	ζ	η
1000	67°	62°	59°	60°	54°
0	71°	66°	64°	66°	60°
-1000	73°	68°	68°	71°	65°
-2000	77°	68°	70°	76°	71°
-3000	69°	66°	70°	79°	75°
-4000	65°	62°	67°	79°	78°
-5000	59°	57°	63°	76°	77°
-6000	53°	52°	58°	71°	73°

Eteläisin leveys, jolla Otava on sirkumpolaarinen on $\phi = 90^\circ - \delta$, missä δ on Otavan eteläisimmän tähden deklinaatio. Etelärajoiksi saamme seuraavat leveydet:

vuosi	leveys
1000	36°
0	30°
-1000	25°
-2000	22°
-3000	24°
-4000	28°
-5000	33°
-6000	38°

Esimerkiksi Kreetalla ($\phi = 35^\circ$) Otava on ollut sirkumpolaarinen noin vuodesta -5000 vuoteen $+1000$. Välimeren etelärannalla joudutaan aikaväliä lyhentämään molemmista päistä noin tuhannella vuodella. Näihin aikoihin siis sijoittuvat Odysseuksen hortoilut Välimerellä.

Sekalaista viihdettä

20.8 Voinemme olettaa, että on ilta. Venuksen suurin elongaatio on 47° , joten se voi nousta korkeintaan noin kolme tuntia ennen Auringoa. Tässä tapauksessa Auringon pitäisi siis nousta noin puoli kolmelta. Sijainti aikavyöhykkeellä ja Venuksen deklinaation vaihtelut voivat muuttaa tätä jonkin verran, joten pyöristetään aika varmuuden vuoksi kolmeksi aamulla. Tämä edellyttää, että leveysaste on ainakin noin 60° . Jos aika on kesäaikaa, tilanne on vielä pahempi. Esimerkiksi vuonna 1985 on Venus noussut Helsingissä aikaisintaan 1:33, Oulussa 0:28 ja Utsjoella 23:03 (kaikki ajat kesäaikaa). Vaihtelut vuodesta toiseen ovat tosin huomattavia. Joka tapauksessa, jos Amerikan mantereella oleva Casanova aikoo esitellä nousevaa Venusta moiseen aikaan, hänen on ilmeisesti oltava suunnilleen Alaskassa.



20.9 *Menetelmä 1* : Pannaan heiluri heilahtelemaan astelevyn päällä ja tullaan vuorokauden kuluttua katsomaan, kuinka paljon heilahdustaso on kiertynyt. Koska kiertymiskulma on $2\pi \sin \phi$, missä ϕ on leveysaste, voidaan leveysaste oitis laskea.

Menetelmä 2 : Mitataan heilurin heilahdusaika mahdollisimman tarkkaan. Tästä saadaan selville vetovoiman kiihtyvyyden ja se hän taas vaihtelee leveysasteen funktiona maapallon litistyneisyyden ja pyörimisen vuoksi. Tosin paikalliset vaihtelut voivat sotkea tulosta melkoisesti. Itse asiassa heilureita on käytetty juuri painovoiman paikallisten vaihteluiden mittaamiseen.

20.10 Vasempi kuva:

- Kuun pimeä puoli puoli osoittaa Aurinkoa kohti.
- Venus (tai Kuu) on liian kaukana ekliptikasta.
- Auringon pitäisi olla litistynyt eikä venynyt pystysuunnassa. Tällainenkin muoto voi olla joskus mahdollinen, mutta se edellyttää jotenkin patologista ilmakehän lämpötila- ja painejakautumaa.
- Liiterin varjo osoittaa väärään suuntaan.

Oikeampi kuva:

- Taustalla näkyy Otava, joten Kuu, Venus ja Jupiter ovat harhailleet aika kauas ekliptikasta.
- Puolikuun elongaatio on 90° , joten Venuksen ei pitäisi olla lähimaillakaan.
- Kuu on läpinäkyvä.
- Kuun valaistu puoli ei osoita ekliptikan suuntaan (eli sinne, missä Auringon tulisi olla).
- Kuun läpimitta on valtava (noin 5° , vertaa esim. Otavaan); pitäisi olla 0.5° .

20.11 Taiteellinen vapaus on sallinut ainakin seuraavat poikkeamat arkipäivän todellisuudesta:

- Tässäkin Kuu on väärinpäin.
- Yksi tähti näkyy Kuun läpi.
- Tähdet näkyvät keskellä kirkasta päivää.
- Tähdistö näyttää varsin keinotekoiselta.

20.12 Marsin etäisyys oppositiossa on noin 0.5 AU, joten sen vetovoimakenntä on

$$\begin{aligned} F_{\text{Mars}} &= \frac{Gm}{r^2} \\ &= \frac{6.67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2} \times 6.42 \times 10^{23} \text{ kg}}{(0.5 \times 1.50 \times 10^{11} \text{ m})^2} \\ &= 7.6 \times 10^{-9} \text{ N kg}^{-1}. \end{aligned}$$

Juntin vetovoimakenntä on

$$F_{\text{juntti}} = 2.7 \times 10^{-8} \text{ N kg}^{-1} \approx 3.5 F_{\text{Mars}}.$$

Juntin vaikutus on siis noin 3.5-kertainen Marsin vaikutukseen verrattuna. Silti astrologit ottavat laskuissaan huomioon Marsin, mutta eivät tuntematonta junttiamme.



Kun nyt vauhtiin päästiin, niin lasketaanpa samalla, miten jun-
tin ja eräiden taivaallisten kohteiden vaikutukset suhtautuvat, jos
käytämme mittapuuna potentiaalienergiaa, vetovoimaa ja vuoro-
vesivoimia. Potentiaalienergia on verrannollinen m/r :ään, veto-
voima m/r^2 :een ja vuorovesivoima m/r^3 :een. Jos merkitsemme
junttia ykkösellä, saamme seuraavanlaisen tuloksen (F on veto-
voima ja F_t vuorovesivoima):

	$m[\text{kg}]$	$r[\text{m}]$	U	F	F_t
juntti	100	0.5	1	1	1
Maa	6.0×10^{24}	6.4×10^6	4.7×10^{15}	3.6×10^8	2.8×10^1
Kuu	7.3×10^{22}	3.8×10^8	9.6×10^{11}	1.3×10^3	1.6×10^{-6}
Aurinko	2.0×10^{30}	1.5×10^{11}	6.6×10^{16}	2.2×10^5	7.4×10^{-7}
Jupiter	1.9×10^{27}	6.3×10^{11}	1.5×10^{13}	1.2×10^1	9.6×10^{-12}
Linnunrata	4×10^{41}	2.6×10^{20}	7.6×10^{18}	1.5×10^{-2}	2.8×10^{-23}

Kaikki potentiaalienergiat ovat negatiivisia. Linnunradan suhteen olemme kaikkein syvimmissä potentiaalikuopassa: Aurinko kiertää Linnunrataa, Maa ja Jupiter Aurinkoa, Kuu ja juntti Maata. Vetovoima oli (onneksi) suurin maapallolle — pysymme tästä lähtienkin spontaanisti maanpinnalla.

Vuorovesivoima on sekin ylivoimaisesti suurin maapallolle. Absoluuttinen arvo on kylläkin 1 kg:n kappaleelle vain 3×10^{-6} N metriä kohti (esimerkiksi pystysuoraan keppiin kohdistuva venytys). Vuorovesiä ei maapallo kuitenkaan itse aiheuta, koska se pysyy meriin nähden paikoillaan. Vuorovedet aiheutuvatkin Kuusta ja Auringosta, ollen Kuun vaikutus 2.2-kertainen Auringon vaikutukseen verrattuna.

- 20.13 a) Illalla.
 b) Illalla.
 c) Aamulla.
 d) Aamulla.
 e) Uudenkuun hetkellä Kuu on likimain Maan ja Auringon välissä, joten se ei juuri näy (ellei se satu aiheuttamaan pimennystä). Uudenkuun jälkeen Kuu näkyy parhaiten heti auringonlaskun jälkeen.
 f) Jos puolikuu pimentyy, taivaankirjat ovat menneet tosi pahasti sekaisin.
 g) Jos kappale on alakonjunktiossa, se tuskin on Mars.
 h) Sirkuksen rektaskensio on noin 7 tuntia. Auringon rektaskensio maaliskuussa on likimain 0, joten Sirius näyttää liikkuvan taivaalla noin $90^\circ - 120^\circ$ Auringon jäljessä. Siispä se näkyy illalla.
 i) Illalla. Oppositiohetkellä planeetta on korkeimmillaan keskiyöllä.
 j) Illalla. Kuu näkyy D:n muotoisena.
 k) Pääsiäinen on ensimmäisenä kevätpäiväntasauksen jälkeisen täydenkuun jälkeisenä sunnuntaina, ja helluntai on 7 viikkoa pääsiäisen jälkeen. Kuun longitudi on kasvanut $49 \text{ d}/29.5 \text{ d} \times 360^\circ =$



$598^\circ = 240^\circ$ ensimmäisestä pääsiäispäivästä, jolloin Kuu on täydenkuun ja viimeisen neljänneksen välillä. Helluntaina Kuun elonkaatio on siis välillä $[180^\circ + 240^\circ, 270^\circ + 240^\circ] = [60^\circ, 150^\circ]$ ja vaihe on likimain ensimmäinen neljännes. Näkyy siis illalla.

l) Joulun on aina samaan aikaan, joten Kuun vaihe ei voi korreloida joulun ajankohdan kanssa.

m) Sangen epätodennäköistä.

n) Vertaa kohtaan k). Ensimmäisenä pääsiäispäivänä Kuu on täydenkuun jälkeisessä vaiheessa ja näkyy aamulla.

o) Pakinoitsija Olli sanoi joskus jossakin: ”*Jos Kuu joutuu Maan ja Auringon väliin, tulee auringonpimennys. Jos Maa joutuu Kuun ja Auringon väliin, tulee kuunpimennys. Jos Aurinko joutuu Maan ja Kuun väliin, tulee maailmanloppu.*” Tässä tapauksessa olisi kysymys viimeisestä vaihtoehdosta.

p) Sirkumpolaarinen tähti näkyy aina, kun ei ole pilvistä tai liian valoisaa.

q) Siis että mitä??

r) Heliakkisessa nousussa Sirius nousee samaan aikaan kuin Aurinko. Periaatteessa se siis näkyisi aamulla, mutta voi kyllä olla aika vaikea havaittava.

s) Aamulla.

t) Jupiterin näkymisellä ei ole yhteyttä vuodenaikoihin.

u) Miten milloinkin.

v) Vertaa h)-kohtaan. Syksyllä Aurinko on päinvastaisella puolella taivasta, ja Sirius näkyy aamulla.

w) Laskiaissunnuntai on 7 viikkoa ennen pääsiäistä ja laskiaistiistai seuraavana tiistaina, eli 47 päivää ennen pääsiäistä. Tässä ajassa Kuu kulkee matkan $(47/29.5) \times 360^\circ = 573^\circ = 214^\circ$, joten longitudi on välillä $[180^\circ - 214^\circ, 270^\circ - 214^\circ] = [-34, 56]$. Kuu on siis uudenkuun paikkeilla ja näkyy (jos näkyy) vähän ennen auringonnousua tai vähän auringonlaskun jälkeen.

x) Helatorstai oli aikoinaan 40 päivää pääsiäisen jälkeen, jolloin Kuu oli ehtinyt liikkua 128° pääsiäisestä. Longitudi on niin ollen välillä $[-52^\circ, 38^\circ]$, ja Kuu lähellä uuttakuuta.

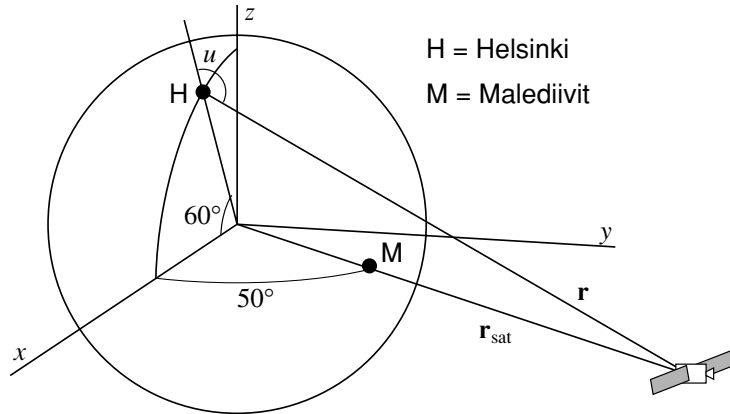
y) Vaihtelee.

z) Kynttilänpäivä oli alkuaan 2. helmikuuta. Nykyisin se on tätä seuraavana sunnuntaina, paitsi, jos 2.2 osuu laskiaissunnuntai- tai sitä edeltävälle viikolle, jolloin se siirtyy edelliseen sunnuntaihin. Useimpina vuosina ei kuitenkaan ole mitään korrelaatiota Kuun vaiheiden kanssa.

ä) Alnairin (α Gruis) deklinaatio on noin -47° , joten Suomen taivaalta sitä on ihan turha etsiä.

ö) Geostationaarinen satelliitti pysyy likimain paikoillaan maapallolla olevan havaitsijan suhteen, joten se näkyy aina, jos näkyy ylipäänsä lainkaan. (Taisi tulla luvatuksi, että nyt ei tarvittaisi paljoa matematiikkaa, mutta tässä sitä taas ollaan, minkäs ihminen luonteelleen voi.) Lasketaan aluksi Helsingin ja satelliitin paikkavektorit. Käytetään yksinkertaisuuden vuoksi koordinaatistoa, jonka xz -taso on Helsingin meridiaanissa (pituus 25°) ja xy -taso ekvaattorin tasossa.





Malediivien pituus on noin 75° , joten ne sijaitsevat 50° itään Helsingin meridiaanista. Tehtävässä 7.9 saimme geostationaarisen satelliitin radan säteeksi 42 340 km.

$$\mathbf{r}_{\text{Helsinki}} = \mathbf{e}_{\text{Helsinki}} \times 6360 \text{ km},$$

$$\mathbf{r}_{\text{satelliitti}} = \mathbf{e}_{\text{satelliitti}} \times 42\,340 \text{ km},$$

missä

$$\mathbf{e}_{\text{Helsinki}} = (\cos 60^\circ, 0, \sin 60^\circ) = (0.500, 0, 0.866),$$

$$\mathbf{e}_{\text{satelliitti}} = (\cos 50^\circ, \sin 60^\circ, 0) = (0.643, 0.766, 0).$$

Tästä saadaan satelliitin paikkavektoriksi Helsingin suhteen

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{r}_{\text{satelliitti}} - \mathbf{r}_{\text{Helsinki}} \\ &= (27220, 32430, 0) - (3180, 0, 5510) \\ &= (24040, 32430, -5510). \end{aligned}$$

Satelliitin zeniittietäisyys u saadaan yhtälöstä

$$\cos u = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_{\text{Helsinki}}}{|\mathbf{r}|} = 0.178,$$

josta $u \approx 80^\circ$. Satelliitti näkyy siis noin 10 asteen korkeudella. Käytännössä se tietenkin näkyy vain kun taustataivas on riittävän pimeä. Kevät- ja syyspäiväntasauksen aikoina satelliitti kulkee joka kierroksellaan Maan varjon läpi ja häviää siten ajoittain näkyvistä.

20.14 a) Kuunpimennyksen aikaan Kuu ja Aurinko ovat vastakkaisilla puolilla taivasta. Jotta Kuu tällöin näkyisi keskipäivällä, täytyy havaitsijan olla jommallakummalla napakalotilla. Sekä Aurinko että Kuu näkyvät hyvin lähellä horisonttia.

b) Tämä edellyttää Auringon näkymistä keskiyöllä, ja on siis myös mahdollista napakaloteilla. Tällainen tapahtuma oli periaatteessa havaittavissa Suomessa 20.5.1985. (Tosin pilvet estivät tapahtuman näkemisen.)

20.15 Koska matkalaiset matkaansaattiin tykillä, heihin vaikuttava työntövoima lakkasi suunnilleen samalla hetkellä kuin ammus

poistui tykinpiipusta. Tämän jälkeen sekä ammus että sen matkustajat ovat vapaassa putousliikkeessä, ja tuntevat itsensä painottomiksi. On täysin yhdentekevää, millaisessa vetovoimaken-
tässä he liikkuvat. Koiravainaa käyttäytyi niin kuin pitääkin, mutta matkustajat eivät oikein olleet perillä fysiikan laeista. Tilanne olisi erilainen, mikäli ammuksessa olisi jokin työntövoimaa synnyttävä kapistus.

20.16 Huonosti.

23.17 ... niin, tuota ...

Näyttää siltä, että olemme hukanneet tehtävän ratkaisun, eikä kukaan tunnu muistavan enää edes, kumpi kuva oli aito. Valitamme tapahtunutta. Täytyykin tästä lähteä...

