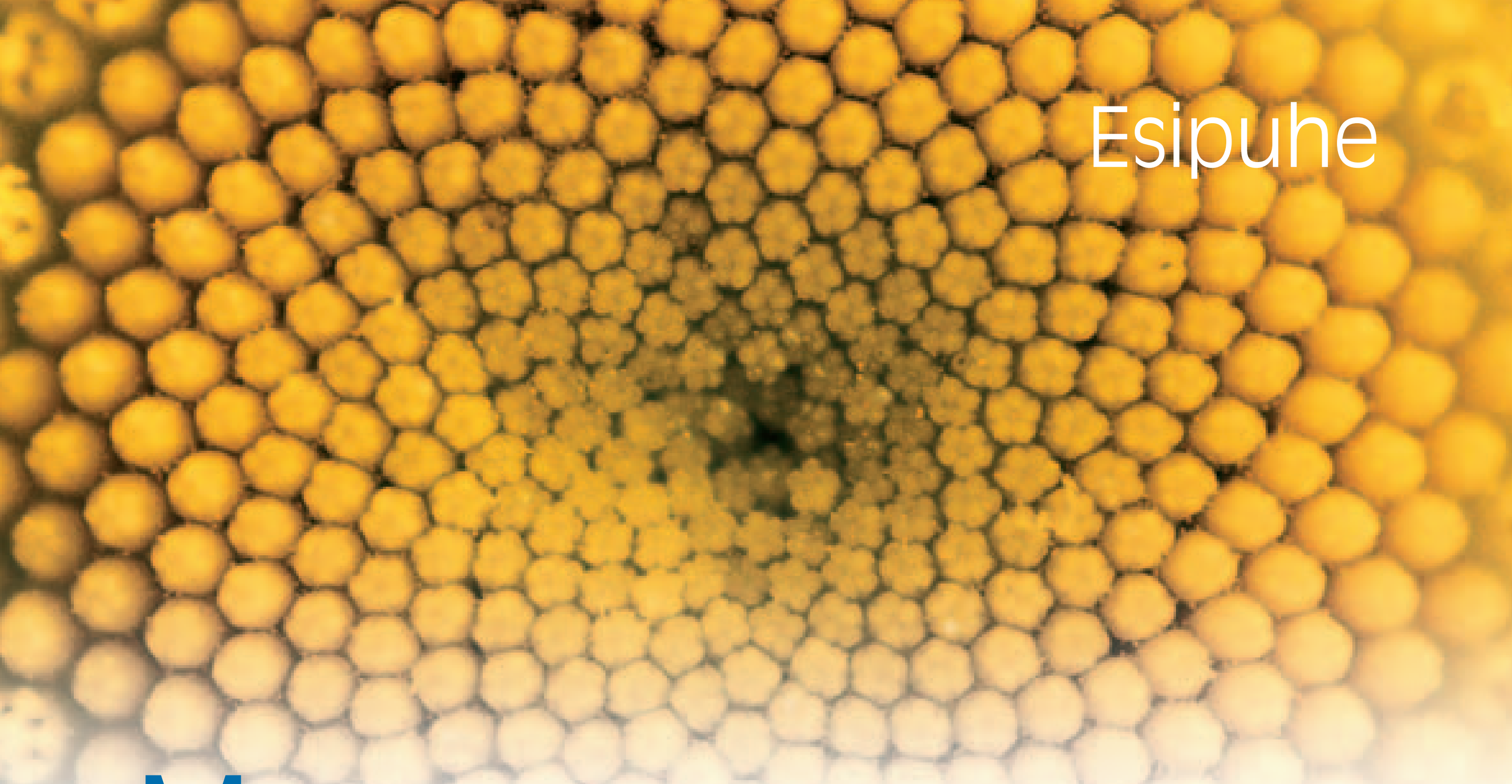


Esipuhe

Monien mieleen matematiikasta tulee jonkinlainen laskuoppi. Matemaatikkoa he saattavat pitää tyyppinä, joka tuossa tuokiossa laskee päässään, onko ravintolalasku oikein. Joillekin matematiikasta taas tulee mieleen maallikolle täysin käsittämättömien kaavojen pyörittely. Laskeminen ja kaavat kuuluvat kyllä matematiikkaan, mutta todellinen matematiikka on jotakin vallan muuta.

Matematiikka on saanut alkunsa aivan käytännön ongelmien tutkimisesta, ja toki matemaattista perustutkimusta tehdään edelleenkin pohjustamaan käytännön ongelmien ratkaisemista. Matematiikkaa on kuitenkin ruvettu tutkimaan myös pelkästään sen itsensä vuoksi. Vaikka käytännön sovellukset eivät olekaan matematiikan ensisijainen päämäärä, hyvinkin kummallisille tuloksille on joskus aivan yllättäen löytynyt käyttöä muiden tieteiden alueelta.

Matematiikka on lähinnä luovaa ajattelua. Todellinen maailma ei kahlitse matemaatikkoa, vaan hän voi taiteilijan tavoin luoda vapaasti sellaisia maailmoja kuin ikinä haluaa. Tässä suhteessa matematiikka eroaa selvästi muista luonnontieteistä, jotka pyrkivät nimenomaan selvittämään ympärillämme olevan todellisuuden ominaisuuksia.

Tämä ei ole matematiikan oppikirja. Tässä ei esimerkiksi käydä läpi laskusääntöjä, jotka opitaan koulukursseilla. Niitä käsitellään vain jonkin verran esimerkkeinä, jos se on tarpeen asian havainnollistamiseksi. Kaavoja ja matematiikassa käytettyjä hassuja merkkejä kirjassa on pakostakin jonkin verran, mutta niitä ei pidä pelästyä; tässä yritetään selittää, mitä ne oikein tarkoittavat. Osittain ne ovat mukana siedätyshoitona matematiikka-allergiaa vastaan, ja monet niistä voi ohittaa, jos ne vaikuttavat liian kryptisiltä.

Kirjan yksi tavoite on antaa hieman taustaa koulun matematiikalle ja selostaa, miten noihin asioihin on tultu. Sen lisäksi yritetään kertoa, millaisille poluille näiden perusasioiden yleistäminen voi johtaa, ja kuvata joitakin eksoottisempia matematiikan aloja, joita ei koulussa käsitellä. Silti tässä käsitellään vain mitättömän pientä osaa matematiikan suunnattoman rikkaasta ja mielikuvituksellisesta maisemasta. Tavattoman laajasta aiheesta mahtuu näin suppeaan kirjaan vain pieni valikoima esimerkkejä, jotka ainakin osittain edustavat kirjoittajan omia mieltymyksiä. Toivottavasti lukija saa silti jonkinlaisen mielikuvan siitä, mitä matematiikka voi olla.

Kirjassa on kieltämättä rajalliseen tilaan ahdettuna varsin paljon asiaa, paikoitellen melko vaikeaakin. Koska tämä ei ole oppikirja, vaikeat kohdat voi hyvin ohittaa ilman, että se haittaisi jatkon ymmärtämistä.

Kiitokset dos. Juha Oikkoselle monista rakentavista huomautuksista. Poliittinen vastuu vääristä painotuksista ja mahdollisista virheistä kuuluu kuitenkin yksinomaan minulle.

Liperissä marraskuussa 2005
Hannu Karttunen

Sisällys

1 Matemaattinen päättely

Aluksi on paikallaan sanoa jotakin matemaattisesta menetelmästä yleensä. Tämä luku voi tuntua hieman abstraktilta, mutta kaikista tässä esitettävistä asioista tulee yksinkertaisia käytännön esimerkkejä seuraavissa luvuissa.

Mitä on matematiikka?

Meteorologian tai biologian tutkimusala on jotenkin määriteltävissä, mutta mitä matematiikka oikein on? Hölmön tuntuinen vastaus on, että "matematiikka on sitä, mitä matemaatikko tutkii".

Oman ikäpolveni keski-ikäiset ihmiset muistavat koulusta sellaiset oppiaineet kuin algebra ja geometria. Edellinen käsitteli lukuja ja laskemista (ja eteni siitä hieman abstraktimpiin asioihin), jälkimmäinen erilaisia muotoja ja niiden mittaamista. Me, jotka opiskelimme matematiikkaa yliopistossa, kohtasimme sellaisia kursseja kuin differentiaali- ja integraalilaskenta, lineaarialgebra, topologia, todennäköisyyslaskenta, matemaattinen logiikka jne. Yliopiston opetusohjelman kurssivalikoima muodostaa tavallaan koulukursseja tarkemman jaon, jossa syvennetään tietoja suppeammilta aloilta. Matematiikan tutkijat menevät vielä paljon syvemmälle vielä rajatummille alueille. Matemaattisten julkaisujen luokitteluun käytettävä MSA-luettelo tuntee nykyisin jo yli 5000 matematiikan erikoisalaa, jotka on ryhmitelty 98 pääluokkaan.

Matematiikka on niin tavattoman monimuotoinen tieteenala, että sitä on lähes mahdotonta luonnehtia lyhyesti. Matematiikkaa ei voi määritellä niinkään sen tutkimuskohteen kuin sen tutkimustavan avulla. Sille on ominaista matemaatikkojen harjoittama tietynlainen tapa päätellä asioita. Niinpä määritelmä "matematiikka on sitä, mitä matemaatikko tutkii" ei ehkä olekaan ihan niin tyhmä kuin aluksi tuntuisi.

Joillakin matematiikan aloilla on paljon käyttöä muissa tieteissä, joillakin toisilla hyvin vähän tai ei lainkaan – ainakaan vielä. Lukuteorian tutkija Godfrey Harold Hardy (1877–1947) totesi, ettei hän ole koskaan tehnyt mitään, mistä olisi ollut käytän-

30C70	Extremal problems for conformal and quasiconformal mappings, variational methods
30C75	Extremal problems for conformal and quasiconformal mappings, other methods
30C80	Maximum principle; Schwarz's lemma, Lindelöf principle, analogues and generalizations; subordination
30C85	Capacity and harmonic measure in the complex plane [See also 31A15]
30C99	None of the above, but in this section
30Dxx	**Entire and meromorphic functions, and related topics**
30D05	Functional equations in the complex domain, iteration and composition of analytic functions [See also 34Mxx, 37Fxx, 39–XX]
30D10	Representations of entire functions by series and integrals
30D15	Special classes of entire functions and growth estimates
30D20	Entire functions, general theory
30D30	Meromorphic functions, general theory
30D35	Distribution of values, Nevanlinna theory
30D40	Cluster sets, prime ends, boundary behavior
30D45	Bloch functions, normal functions, normal families
30D50	Blaschke products, bounded mean oscillation, bounded characteristic, bounded functions, functions with positive real part

Katkelma matemaattisten julkaisujen luokittelusta. Kaksi alaa on nimetty suomalaisten matemaatikkojen, Ernst Lindelöfin ja Rolf Nevanlinnan mukaan.

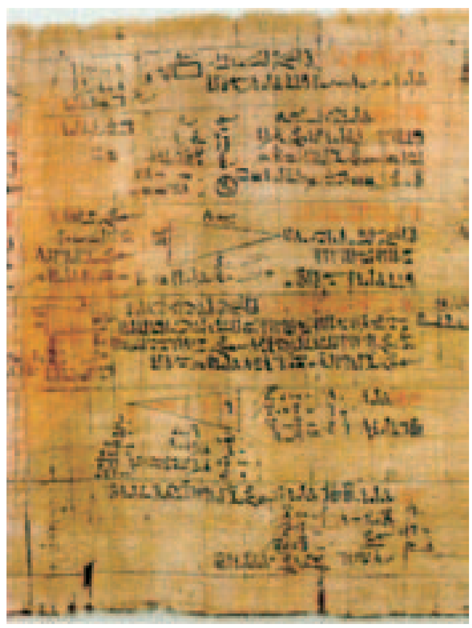
nön hyötyä. Toisaalta alkuaan kovinkin erikoisen tuntuisille aloille on löytynyt käyttöä esimerkiksi kvanttimekaniikasta. Matematiikan tutkimusalojen merkitystä ei kuitenkaan voi arvioida sen perusteella, miten paljon niillä on välittömiä sovelluksia.

Matematiikkaa on myös hyvin vaikeaa jakaa sellaisiin laajoihin kokonaisuuksiin, jotka antaisivat kattavan kuvan koko sen tutkimuskentästä. Niinpä tässä kirjassa esitellään jossakin määrin satunnainen kokoelma haarautuvien ja joskus risteilevienkin polkujen alkupäitä, joista lähtien matkaa voi jatkaa yhä syvällisempien ongelmien pariin, loputtoman pitkälle.

Historiaa

Matematiikka on alkanut yksinkertaisista käytännön tehtävistä, kuten lukumäärien laskemisesta, joka tuli tarpeelliseksi viimeistään silloin, kun tavaroilla alettiin käydä vaihtokauppaa. Lehmien ja oravannahkojen määriä voidaan ilmaista tällä tavoin kokonaisluvuilla. Sen sijaan viljan tai viinin mittaamiseen kap-

Babylonialaisissa nuolenpääkirjoituksissa on mm. kertotauluja sekä taulukoita lukujen neliöistä ja kuutioista, joiden avulla voi ratkaista joitakin toisen ja kolmannen asteen yhtälöitä.



Egyptiläinen Rhindin papyrus on peräisin ajalta noin 1650 vuotta ennen ajanlaskumme alkua. Se sisältää tehtäviä, miten lasketaan erilaisia pinta-aloja ja tilavuuksia.

palemäärät eivät riitä, vaan tarvitaan mittausoppia eli geometriaa ainakin sen verran, että osataan laskea tavallisten säilytysastioiden tilavuuksia. Tällaisia kysymyksiä on käsitelty jo vanhimmissa kirjallisissa dokumenteissa, babylonialaisten savitaulujen nuolenpääkirjoituksissa ja egyptiläisissä papyruksissa.

Nämä muinaiset kirjoitukset käsittelevät erikoistapauksia. Esimerkiksi egyptiläisen Rhindin papyruksen tehtävä 'Määrä, sen puolikas ja neljännes ovat yhteensä 10' muistuttaa nykyisen koulumatematiikan sanallisia tehtäviä. (Mikä on tällainen 'määrä'? Vastaus kirjan lopussa, jossa kerrotaan myös egyptiläisten sille esittämä ratkaisu.) Tehtävät edustavat jonkinlaista matematiikan esitieteellistä kautta, jossa asiaa käsitellään yksittäisten esimerkkien kautta ilman mitään yleisempää teoriaa.

Useimmissa käytännön tehtävissä tällainen laskutaito on täysin riittävää. Joskus vastaan voi kuitenkin tulla ongelmia, joissa sormi menee suuhun eikä pulmaa voi ratkaista pelkän kokemuksen avulla. Silloin avuksi tarvitaan matemaattista ajattelua, jonka avulla määritellään täsmällisesti, mitä oikein oletetaan, mitä eri asioilla tarkkaan ottaen tarkoitetaan ja miten tietyistä oletuksista päätellään uusia tosiasioita.

Tieteellisen tutkimusmenetelmän voi katsoa alkaneen antiikin Kreikassa. Erityisesti geometria kehittyi huomattavan pitkälle, ja sen tuloksia sovellettiin myös tähtitieteeseen. Vanhin kokonaisena säilynyt matematiikan oppikirja on Aleksandriassa vaikuttaneen Eukleideen 2300 vuotta sitten kirjoittama *Stoikheia* eli latinaksi *Elementa* (Alkeet).

Elementan rakenne ei juuri poikkea nykyisistä yliopistotason matematiikan oppikirjoista ja tieteellisistä artikkeleista. Siinä määritellään aluksi joitakin peruskäsitteitä, kuten piste ja suora, sekä annetaan muutama yksinkertainen oletus eli *aksiooma*, joiden totuutta pidetään itsestään selvänä. Niiden avulla sitten todistetaan mutkikkaampia väitteitä eli *teoreemoja*. *Elementaan* perustuva geometria oli aikoinaan ainoa koulukurssi, jossa tutustuttiin matematiikalle ominaiseen esitystapaan; nyt sitä ei opeteta enää lainkaan ennen yliopistoa.

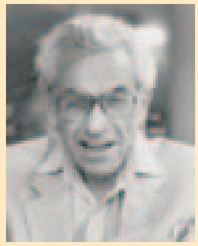
Tieteellisillä kirjoituksilla on oma tyylinsä, jonka tarkoituksena on välittää tietoa toisille saman alan ammattilaisille mahdollisimman lyhyessä ja ytimekkäässä muodossa. Ne eivät kuitenkaan kuvaa sitä todellista työtä, jonka avulla tuloksiin on päädytty. Kuten muutkin tutkijat, myös matemaatikko voi käytännössä lähestyä ongelmiaan hyvin epätieteellisellä tavalla. Tärkeän tuloksen voi oivaltaa jonkinlaisen intuition avulla, mutta intuitio voi johtaa myös harhaan. Tulos on aina pystyttävä perustelemaan täsmällisen päättelyn avulla. Vain nämä äärimmilleen hiotut ajatuskulut päätyvät tieteellisiin julkaisuihin ja lopulta ehkä myös oppikirjoihin.

Eukleides
(n. 300 eaa.)

■ *Eukleides oli Aleksandriassa toiminut matemaatikko. Hänen elämästään tiedetään varsin vähän.*

Eukleides kokosi aikansa geometrisen tiedon perusteet systemaattiseksi esitykseksi. Teoksessa Stoikheia *eli* Elementa *viidestä aksioomasta ja viidestä postulaatista johdetaan 465 geometrian teoreemaa. Teos säilyi lukuisina käännöksinä geometrian perusoppikirjana yli kahden vuosituhannen ajan.*

Filosofi Proclus on kertonut, kuinka kuningas kysyi, eikö geometriaan ole helpompaa tietä kuin Elementan *opiskelu, mihin Eukleides vastasi, ettei geometriaan ole kuninkaallista oikotietä.*



Erdös, Pal
(1913–1996)

■ *Unkarilainen matemaatikko, joka on vaikuttanut hyvin monilla aloilla.*

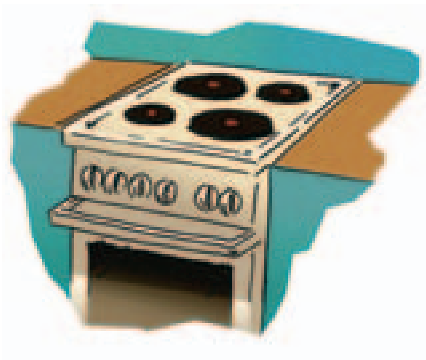
Erdös vietti matkalaukkuelämää asuen vuorotellen eri kollegojensa luona ja kuljettaen koko maallisen omaisuutensa mukanaan. Hän työskenteli taukoamatta kahvin ja amfetamiinin turvin ja heitteli lukemattomia uusia ideoita, joita muut sitten kehittelivät edelleen. Hän julkaisi noin 1500 tieteellistä artikkelia.

Tieteellisten yhteisjulkaisujensa suunnattoman määrän seurauksena on syntynyt käsite Erdösin luku. Erdösin itsensä Erdösin luku on nolla. Jos henkilöllä on yhteinen julkaisu Erdösin kanssa, hänen Erdösin lukunsa on yksi. Jos hänellä on yhteinen julkaisu sellaisen kanssa, jonka Erdösin luku on yksi, hänen lukunsa on kaksi jne. (Tämän kirjan tekijän Erdösin luku on varmuudella korkeintaan kuusi; onko se yhtään pienempi, on toistaiseksi avoin kysymys.)

Aksioomat

Matematiikka on tavallaan abstraktia päättelyä, jossa valitaan joukko oletuksia eli aksioomia ja sitten kat-

Muutamat anekdootit kuvaavat osuvasti matematiikan luonnetta, vaikka ne haiskahtavatkin fyysikoiden keksimiltä.



■ Seuraavan pääsykoetehtävän tarkoituksena on erotella matematiikan ja fysiikan opiskelijat. Käytettävissä on hella, tyhjä kattila ja vesihana.

Ensimmäinen tehtävä on kuumentaa litra vettä. Fysikaalisesti ja matemaattisesti suuntautuneet opiskelijat toimivat samalla tavoin: he täyttävät kattilan vedellä ja kuumentavat sen liedellä.

Sitten seuraa ratkaiseva toinen tehtävä. Järjestely on kuten edellä, mutta kattila on jo valmiiksi täynnä vettä. Fyysikko nostaa kattilan liedelle ja kuumentaa sen. Matemaatikko sen sijaan kaataa veden pois, jolloin tehtävä palautuu ensimmäiseksi, joka on jo ratkaistu.

Mitä se on: Anekdootin perusteella matemaatikkoja voisi pitää hiukan outoina tyyppeinä, mutta itse asiassa se kuvaa sitä, miten viisas pää see vähemmällä. Jokin todistus ("veden kuumentaminen") voi olla hyvin työläs ja mutkikas. Usein halutaan osoittaa, että sama tulos seuraa myös hieman toisenlaisista oletuksista. Tietysti voitaisiin toistaa pitkä ja mutkikas päättely pienin muunnoksin, mutta helpompaa voi olla "kaataa vesi pois" ja osoittaa vain, että alkuperäiset oletukset seuraavat niistä toisenlaisista oletuksista.

■ Tähtitieteilijä, fyysikko ja matemaatikko matkustivat junalla. Ikkunasta näkyi laitumella olevia mustia lehmiä.

Tähtitieteilijä: "Tämän maan lehmät ovat mustia."

Fyysikko: "Ei niin voi sanoa. Tiedämme vain, että tässä maassa on joitakin mustia lehmiä."

Matemaatikko: "Ei, tiedämme ainoastaan, että tässä maassa on lehmiä, joiden toinen kylki on musta."

Mitä se on: Tähtitieteilijä on sikäli ikävässä asemassa, että hän voi havaita vain pienen otoksen kohteistaan eikä voi kierrellä tutkimassa niitä eri suunnista. Hänen on tyydyttävä niihin havaintoihin, mitä luonto sattuu tarjoamaan. Niiden perusteella hän joutuu joskus tekemään melkoisia yleistyksiä havaitsemiensa kohteiden luonteesta. Fyysikko voi tutkia kohteitaan paljon monipuolisemmin, joten hänen päätelmänsä ovat myös yksityiskohtaisempia. Matemaatikko edustaa tällaisen päättelyn ääripäätä: hän pitäytyy pelkästään teorian oletuksiin (esimerkin tapauksessa havaittuihin tosiasioihin) ja tutkii, mitä niiden avulla voi päätellä.